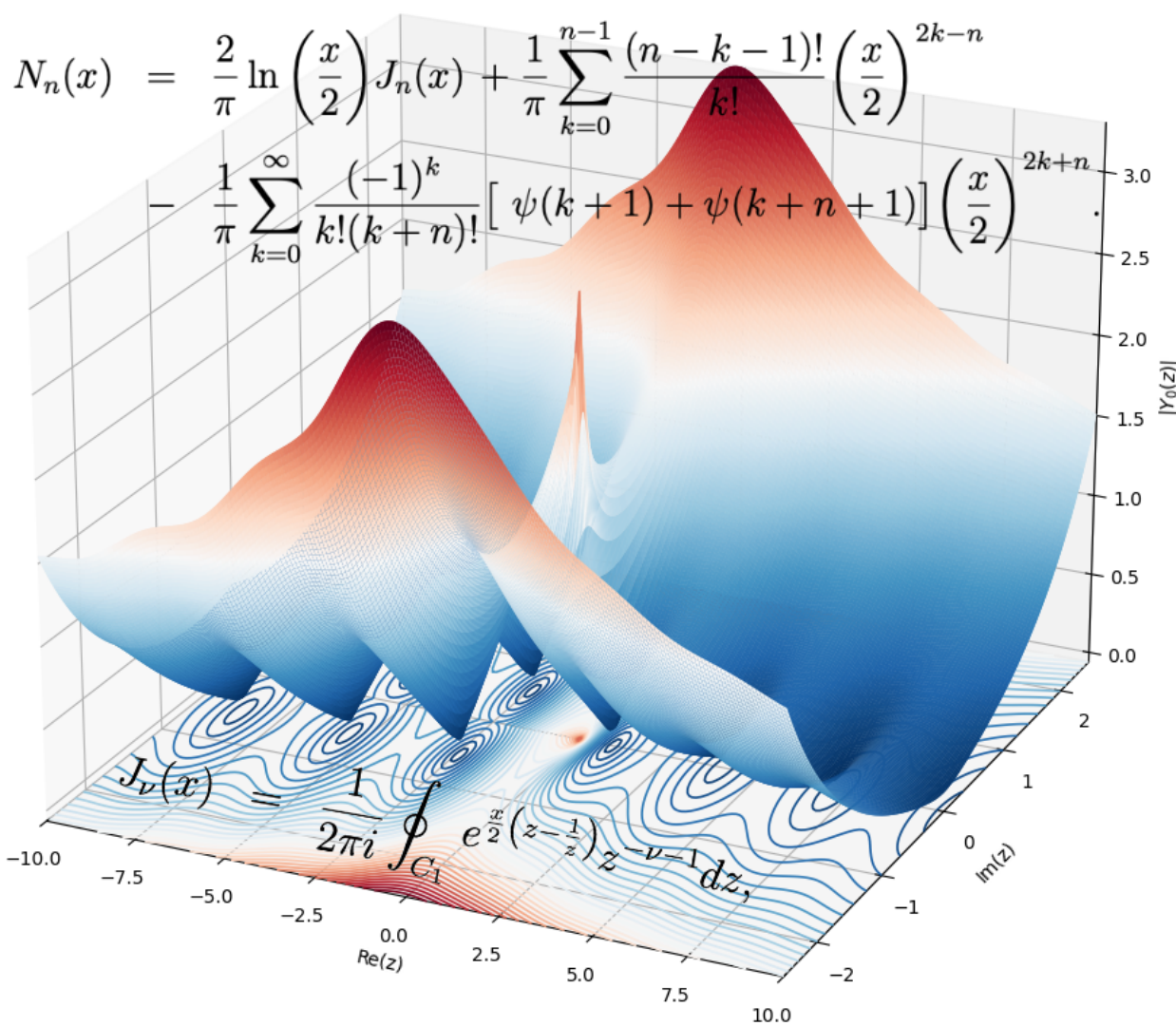


MÉTODOS MATEMÁTICOS

*Funciones especiales y
ecuaciones en derivadas parciales*



Raúl Salgado García

Universidad Autónoma del Estado de Morelos

Métodos matemáticos

Funciones especiales y
ecuaciones en derivadas parciales

Raúl Salgado García



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Salgado García, Raúl, autor

Métodos matemáticos : funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales / Raúl Salgado García.- - Primera edición.- - México : Universidad Autónoma del Estado de Morelos, 2026.

400 páginas

ISBN: 978-607-2646-41-4

1. Análisis matemático 2. Funciones especiales 3. Cálculo integral

LCC QA300

DC 515

Esta publicación fue dictaminada por pares académicos bajo la modalidad doble ciego.

Métodos matemáticos. Funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales
Primera edición, septiembre de 2026

D.R. 2026, Raúl Salgado García (autor).

D.R. 2026, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
Av. Universidad 1001, Col. Chamilpa, C.P. 62209
Cuernavaca, Morelos, México
publicaciones@uaem.mx
libros.uaem.mx

Corrección de textos: Elizabeth Pérez Trigo

Formación: Raúl Salgado García

Diseño de portada: Lizbeth Zenteno

Imagen de portada: Raúl Salgado García

ISBN: 978-607-2646-41-4

DOI: [10.30973/2026/metodos_matematicos](https://doi.org/10.30973/2026/metodos_matematicos)



Esta obra se distribuye bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0).

Hecho en México

Contenido

Prólogo	xI
I Funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales	1
1. La función gamma de Euler y funciones relacionadas	3
1.1. La función gamma	3
1.1.1. Definición de la función gamma y el factorial de un entero	4
1.1.2. Otras representaciones de la función gamma	6
1.1.3. Algunos valores especiales	12
1.1.4. La fórmula de reflexión	14
1.2. Las funciones digamma y poligamma	16
1.2.1. La función digamma	16
1.2.2. La función poligamma	20
1.3. La función zeta de Riemann	22
1.4. La función beta	28
1.4.1. La fórmula de duplicación de Legendre	29

1.5. Otras funciones especiales	31
1.5.1. Las funciones gamma incompleta superior e inferior	31
1.5.2. La función error y funciones relacionadas	34
1.6. Ejercicios	38
2. Ecuaciones en derivadas parciales	47
2.1. Clasificación de la ecuaciones en derivadas parciales	47
2.1.1. Una clasificación de ecuaciones diferenciales parciales	48
2.1.2. Condiciones de frontera	51
2.1.3. Métodos de solución	54
2.2. Teoría de Sturm-Liouville	55
2.2.1. Operadores conjugados	55
2.2.2. El problema Sturm-Liouville	60
2.3. La forma Sturm-Liouville de una EDO	65
2.4. Ejercicios	67
3. El método de separación de variables	71
3.1. Separación de variables I	71
3.1.1. La ecuación de onda en 1D	72
3.1.2. La ecuación de conducción de calor 1D	80
3.1.3. La ecuación de onda en 2D	87
3.2. Otras ecuaciones de la física	96
3.2.1. La ecuación de difusión 1D	96

3.2.2. La ecuación de difusión 1D con arrastre	101
3.3. Ejercicios	109
4. Funciones cilíndricas	113
4.1. Separación de variables II	113
4.1.1. La ecuación de onda 2D en coordenadas polares	113
4.1.2. La ecuación de Bessel	116
4.2. Funciones de Bessel	121
4.2.1. Funciones de Bessel de primer tipo	121
4.2.2. La función generatriz de las funciones de Bessel	125
4.2.3. Relaciones de recurrencia	126
4.2.4. Representaciones integrales	129
4.2.5. Ortogonalidad	133
4.2.6. Funciones de Bessel de segundo tipo	138
4.2.7. Funciones de Hankel	142
4.3. Funciones de Bessel modificadas	146
4.3.1. Ecuación de Bessel modificada	146
4.3.2. Funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo	147
4.3.3. Relaciones de recurrencia	148
4.3.4. Representaciones integrales	150
4.4. Expresiones asintóticas	154
4.5. Ecuaciones en derivadas parciales	
en coordenadas polares	157
4.5.1. Ecuación de onda en un dominio circular	157

4.5.2. Ecuación de onda en un dominio anular	169
4.5.3. Ecuación de conducción de calor con difusividad térmica variable	178
4.6. Ejercicios	184
5. Funciones esféricas	191
5.1. Separación de variables III	191
5.1.1. La ecuación de onda en coordenadas esféricas	191
5.2. Polinomios de Legendre	194
5.2.1. La ecuación de Legendre	195
5.2.2. Función generatriz de los polinomios de Legendre	200
5.2.3. Algunas propiedades de los polinomios de Legendre	201
5.2.4. Ortogonalidad	207
5.3. Funciones asociadas de Legendre	210
5.3.1. Funciones asociadas de Legendre y su ecuación diferencial	210
5.3.2. Función generatriz y relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre	214
5.3.3. Ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre	217
5.4. Armónicos esféricos	218
5.4.1. Operador de Laplace y los armónicos esféricos	218
5.5. Funciones de Bessel esféricas	222
5.5.1. Funciones de Bessel de orden semientero	223
5.5.2. Funciones de Bessel esféricas	224
5.5.3. Algunas propiedades de las funciones de Bessel esféricas	226
5.5.4. Ortogonalidad de las funciones de Bessel esféricas	229

5.6. Ecuaciones diferenciales parciales	
en coordenadas esféricas	230
5.6.1. Ecuación de onda en un dominio esférico	230
5.7. Ejercicios	233
6. Otras funciones especiales	237
6.1. Polinomios ortogonales	237
6.1.1. Polinomios de Hermite	237
6.1.2. Polinomios de Laguerre	248
6.1.3. Polinomios asociados de Laguerre	262
6.2. Funciones hipergeométricas	270
6.2.1. La función hipergeométrica	271
6.2.2. La función hipergeométrica confluyente	277
6.3. Ejercicios	289
II Métodos integrales	295
7. Ecuaciones integrales	297
7.1. Tipos de ecuaciones integrales	297
7.2. Ecuaciones diferenciales como ecuaciones integrales	298
7.3. Método de la serie Neumann	300
7.4. Método del núcleo separable	305
7.5. La teoría de Hilbert-Schmidt	310
7.6. Ejercicios	321

8. Funciones de Green	325
8.1. Funciones de Green en 1D	326
8.2. Funciones de Green en dimensiones superiores	332
8.3. Funciones de Green en 2D y 3D	336
8.4. Ejercicios	340
9. Transformadas integrales	341
9.1. La transformada de Fourier y la transformada de Laplace	342
9.1.1. La transformada de Fourier	342
9.1.2. La transformada de Laplace	345
9.2. La ecuación de difusión 1D	348
9.2.1. Solución mediante transformada de Fourier	348
9.2.2. Solución mediante transformada de Laplace	352
9.2.3. Ecuación de difusión en el semi-eje positivo: solución por transfor- mada de Laplace y el método de las imágenes	359
9.3. La ecuación de difusión 2D	365
9.4. Ejercicios	369
A. Algunas identidades de utilidad	371
A.1. Método de Laplace	371
A.2. Integrales	373
A.3. Series infinitas	373
Bibliografía	382

A la memoria de mis padres,
quienes me enseñaron el valor del trabajo,
la disciplina, la puntualidad y la perseverancia.

A Stephany,
mi dulce compañía.

Prólogo

El propósito principal de este libro es exponer la construcción de diferentes métodos de solución de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones ordinarias que aparecen en problemas asociados al estudio de fenómenos físicos así como la introducción de funciones especiales que se originan al resolver dichos problemas. El enfoque de este libro tiene como propósito principal que el lector pueda analizar las metodologías de solución y durante este proceso analizar las soluciones de ecuaciones diferenciales que resultan en funciones especiales.

En este sentido, en el capítulo [1](#) se introduce la función gamma de Euler, la cual es una herramienta de mucha utilidad en la construcción de diversas funciones especiales, al tratarse de una función que generaliza la operación factorial. En este mismo capítulo se introducen algunas funciones relacionadas con la función gamma, tales como las funciones digamma y poligamma, la familia de funciones beta de Euler o la función zeta de Riemann y exploramos sus propiedades más elementales. En este punto, se pone al lector en contacto con uno de los principales objetivos de este libro al introducir funciones especiales en capítulos posteriores: conocer las propiedades de una función especial a través de diferentes representaciones o a través de diversas relaciones funcionales (o relaciones de recurrencia), que nos facilita comprender su comportamiento en general.

El capítulo [2](#) está destinado a introducir al lector en el mundo de las ecuaciones en derivadas parciales, presentar diversas clasificaciones, así como dar un panorama de las principales ecuaciones en derivadas parciales que se originan en el estudio de diversos fenómenos físicos. Asimismo, se establecen las condiciones generales (condiciones de frontera y condiciones iniciales), para establecer adecuadamente el problema y la correspondiente solución. Este capítulo finaliza con el estudio de la teoría de Sturm-Liouville, la que permite obtener soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con características especiales, soluciones a las que nos referiremos genéricamente como *funciones especiales*. Posteriormente, en el capítulo [3](#) se introduce el método de la separación de variables a través de ejemplos sencillos. Ya en esta sección se hace uso de la teoría de Sturm-Liouville para establecer propiedades ya conocidas de algunas funciones elementales y la construcción de soluciones

generales a través de desarrollos en serie. Veremos en particular cómo se origina la serie de Fourier como un problema tipo Sturm-Liouville en lugar de visualizarlo como un cambio de base, como normalmente se introduce.

En el capítulo 4 se comienza con el estudio de las funciones que se generan al resolver problemas con geometría cilíndrica. Abordamos inicialmente el problema de resolver la ecuación de onda en un dominio circular como motivación para introducir la gran familia de funciones denominada *funciones de Bessel*. Primero, desarrollamos las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, que son las que ayudan a resolver el problema de la función de onda. Se establecen estas funciones como una analogía de las funciones trigonométricas, analogía que se extiende al definir las funciones de Hankel (también llamadas *funciones de Bessel de tercer y cuarto tipo*) como las equivalentes de las funciones exponenciales imaginarias. Posteriormente, introducimos las funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo, siendo esta última una función clave para obtener aproximaciones asintóticas de todas las funciones de la familia Bessel.

Posteriormente, en el capítulo 5 comenzamos el estudio de la solución de ecuaciones en derivadas parciales con geometría esférica, particularmente de la ecuación de onda como el arquetipo de problemas en los que se originan las funciones que genéricamente denominamos *esféricas*. Inicialmente, se definen los polinomios de Legendre y las funciones asociadas de Legendre como soluciones asociadas a la parte angular de la ecuación de onda. Luego, se introducen los armónicos esféricos que aparecen normalmente al resolver problemas con geometría esférica en los que interviene el operador de Laplace. En el caso particular de la ecuación de onda, se desarrolla la solución general a través de las funciones de Bessel esféricas que se definen como una extensión natural de las funciones de Bessel al caso esférico. El capítulo 6 se dedica a introducir varias familias de funciones especiales. Además, se introducen las familias de polinomios ortogonales de Hermite y de Laguerre así como los polinomios asociados de Laguerre, y culminamos este capítulo con una breve introducción a la teoría de las funciones hipergeométricas.

Por otro lado, en la segunda parte de este libro se aborda el tema de los métodos integrales para resolver ecuaciones en derivadas parciales. De esta manera, en el capítulo 7 se aborda el problema de las ecuaciones integrales con cierta generalidad y analizamos su conexión con las ecuaciones diferenciales ordinarias en una dimensión. En ese capítulo se presenta la técnica de la serie de Neumann, así como el método del núcleo separable, para resolver una amplia clase de ecuaciones integrales lineales, tanto de tipo Fredholm como de tipo Volterra. Además, se establece una teoría paralela a la teoría de Sturm-Liouville para las soluciones de ecuaciones integrales con núcleo simétrico, conocida como la teoría de Hilbert-Schmidt. En el capítulo 8 nos adentramos, brevemente, a la teoría de funciones de Green como técnica de solución de ecuaciones en derivadas parciales y su conexión tanto con la teoría de ecuaciones integrales como con las funciones propias que resultan

de la teoría de Sturm-Liouville. En el capítulo 9 exponemos brevemente la técnica de transformadas integrales para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Presentamos las dos transformaciones integrales emblemáticas, que son la *transformada de Fourier* y la *transformada de Laplace*. Al final del libro, se presenta un apéndice con fórmulas elementales que son de utilidad para su consulta y para poder desarrollar los cálculos presentados aquí.

Es conveniente mencionar que todas las gráficas (no esquemáticas) presentadas a lo largo del libro han sido obtenidas mediante códigos escritos en Python utilizando librerías de código abierto. Específicamente, se hace uso de la librería SciPy que contiene rutinas para cálculo de varias funciones especiales, varias incluso que no se mencionan en este libro. Los códigos escritos para este propósito se pueden encontrar en el repositorio de GitHub creado *ex profeso* para su consulta por parte de los estudiantes:

<https://github.com/raul-sg-001/Metodos-Matematicos-Funciones-Especiales.git>

Finalmente, se debe dejar dicho que este libro es un compendio de técnicas matemáticas cuyo propósito es servir como punto de referencia de aprendizaje en la gran diversidad de disciplinas que requieren esta clase de metodologías, con un enfoque, principalmente, en la física o la ingeniería.

Cuernavaca, Morelos a 19 de agosto de 2025
Raúl Salgado García

Por una parte, la materia que trato es tan vasta y tan variada que temo abordar el asunto de una manera enciclopédica y superficial; por otra, es deber mío no cansar la imaginación con aforismos que únicamente ofrecerían generalidades bajo formas áridas y dogmáticas.

Alexander von Humboldt
Cosmos. Ensayo de una descripción física del mundo

Parte I

Funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales

Capítulo 1

La función gamma de Euler y funciones relacionadas

1.1. La función gamma

El 13 de octubre de 1729, Christian Goldbach, matemático prusiano, nacido en Königsberg, conocido principalmente por la conjetura que lleva su nombre [\[1\]](#) recibió una carta en la que se resolvía el problema de extender la función factorial para valores no enteros positivos. El remitente de dicha carta era quien hoy es considerado uno de los más grandes y prolíficos matemáticos de todos los tiempos y cuyo nombre se asocia con múltiples descubrimientos tanto en la física como en las matemáticas: Leonhard Paul Euler [\[23\]](#). En realidad, quienes propusieron a Leonhard Euler el problema de extender la función factorial fueron Daniel Bernoulli y Christian Goldbach [\[7\]](#), reconocidos también como grandes matemáticos de la historia. Hoy en día, esta función es ampliamente conocida como la función gamma de Euler, y es una función icónica tanto en la física como en las matemáticas. A esta función nos referiremos simplemente como función gamma.

La función gamma es una de las primeras funciones especiales que se presentarán a lo largo de este libro, por dos razones principalmente. Primero, la función gamma es de suma importancia porque varias funciones especiales, que resultan al resolver algunas ecuaciones de la física, inevitablemente se desarrollan con ayuda de dicha función. El segundo propósito de introducir la función gamma es de carácter práctico. Aunque la función gam-

¹La conjetura de Goldbach establece que “todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos”, y es considerado uno de los problemas abiertos más antiguos de la historia de las matemáticas. Curiosamente, este problema fue también establecido en una correspondencia de Goldbach a Euler fechada el 7 de junio de 1742 [\[23\]](#).

ma es *especial* porque no está definida en términos de funciones elementales, no pertenece a la clase de funciones especiales que se desarrollarán más adelante dentro del marco de la teoría de Sturm-Liouville. No obstante, la función gamma sirve como arquetipo de la metodología y del espíritu mismo del desarrollo de las funciones especiales, como se presentarán a lo largo de este libro. Esto es, cuando se *define* una función especial a través de alguna fórmula o ecuación, sus propiedades normalmente se obtienen mediante diferentes representaciones de la misma, o formulaciones alternativas que pueden permitirnos simplificar cálculos o incluso hallar nuevas propiedades que en formulación original no son del todo directas.

1.1.1. Definición de la función gamma y el factorial de un entero

Al parecer, la primer definición de la función gamma en este sentido fue la versión dada por Euler, en su correspondencia con Goldbach, establecida como un producto infinito. La función gamma se suele representar con la letra griega gamma mayúscula, Γ ^[2]. Más tarde, el mismo Euler encontraría la representación como integral impropia, que es la definición más popular y elegante que aparece en varios libros de física y matemáticas.

Vamos a definir la función gamma, $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, como el siguiente límite infinito (definición también debida a Euler ^[5]):

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z. \quad (1.1)$$

Como mencionamos anteriormente, la motivación para introducir la función gamma es que se trata de una función que extiende la función factorial para valores más allá de los enteros positivos. Mostremos que $\Gamma(z)$ es, efectivamente, una función que interpola los valores del factorial. Comencemos observando que, cuando evaluamos Γ en $z+1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^{z+1} \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^{z+1} \\ &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^z \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Notemos que, en el límite anterior, las cantidades encerradas entre paréntesis poseen un límite bien definido cuando $n \rightarrow \infty$. Los primeros paréntesis encierran una cantidad cuyo

²La notación de la función con la letra griega gamma, Γ , es debida a Legendre, aunque previamente Gauss utilizó la letra griega Π para la función factorial.

límite es uno, mientras que la segunda pareja de paréntesis tiene como límite la función gamma evaluada en z . Puesto que el límite de un producto puede escribirse como el producto de los límites (cuando éstos existen), entonces, resulta claro que:

$$\Gamma(z+1) = z \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)}{z(z+1)(z+2)(z+3) \cdots (z+n+1)} n^z \right), \quad (1.3)$$

de donde se sigue inmediatamente que la función $\Gamma(z)$ satisface la siguiente propiedad,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.4)$$

la cual es una de las relaciones funcionales básicas de la función gamma. Este tipo de relaciones son denominadas genéricamente como *relaciones de recurrencia*, y esta es, en particular, una relación de recurrencia de la función gamma. Más adelante veremos que las relaciones de recurrencia serán de importantes para entender, en parte, el comportamiento de una función especial. Por otro lado, también podemos notar que si $z = 1$, entonces, el límite se puede calcular fácilmente:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(1)(2)(3) \cdots (n+1)} n^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Es decir, tenemos que el valor de la función $\Gamma(z)$ en z igual a uno es justamente uno. Esta propiedad, en forma conjunta con la relación funcional (a la que también llamaremos *relación de recurrencia*), nos permite obtener valores de la función gamma para valores de z enteros más allá de la unidad. En efecto, recordando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y tomando $z = 2$, entonces, tendremos que:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

esto es, la función gamma valuada en $z = 2$ también es uno. Tomando un entero positivo n arbitrario, es fácil convencerse de que:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\Gamma(1), \end{aligned} \quad (1.6)$$

lo que muestra que:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!, \quad (1.7)$$

es decir, la función $\Gamma(z)$ toma los valores de la función factorial cuando z es un entero positivo.

1.1.2. Otras representaciones de la función gamma

Vamos ahora a obtener una representación alternativa de la función $\Gamma(z)$ partiendo de la definición que introdujimos en la ecuación (1.1) como un límite infinito. Comencemos definiendo una función que nos será de mucha utilidad para este fin. Sea $F : \mathbb{C} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida como:

$$F(z, n) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (1.8)$$

Esta función la vamos a transformar en otra integral mediante el cambio de variables $u = t/n$. Realizando dicho cambio de variable podemos observar que:

$$F(z, n) = \int_0^1 (1-u)^n (un)^{z-1} n du, \quad (1.9)$$

o bien, acomodando los factores,

$$F(z, n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du. \quad (1.10)$$

Vamos ahora a hacer una transformación más: vamos a realizar la integración por partes tomando las funciones $f = (1-u)^n$ y $g' = u^{z-1}$. Recordando la vieja fórmula de integración por partes³, podemos ver que:

$$\begin{aligned} F(z, n) &= n^z \left[(1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^z}{z} du \right] \\ &= \frac{n^{z+1}}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du, \end{aligned} \quad (1.11)$$

o bien,

$$F(z, n) = n^z \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du. \quad (1.12)$$

Solo con fines ilustrativos y para entender con facilidad la siguiente exposición de ideas, vamos a definir una nueva función, denotada por $G_n(z)$, como sigue,

$$G_n(z) := \frac{F(z, n)}{n^z} = \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du. \quad (1.13)$$

Esta expresión para $G_n(z)$ se obtiene a partir de la identidad (1.10). Por otro lado, si miramos la identidad (1.12), podremos darnos cuenta de que la función $G_n(z)$ satisface

³Esto es, $\int f g' = f g - \int f' g$.

una relación funcional interesante que resulta ser una relación de recurrencia. No es difícil apreciar que la ecuación (1.12) nos conduce a:

$$G_n(z) = \frac{n}{z} G_{n-1}(z+1). \quad (1.14)$$

Si iteramos esta relación de recurrencia sucesivamente para reducir el valor de n a cero, podemos ver que:

$$\begin{aligned} G_n(z) &= \frac{n}{z} G_{n-1}(z+1) = \frac{n(n-1)}{z(z+1)} G_{n-2}(z+2) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{z(z+1)(z+2)} G_{n-3}(z+3) \\ &\vdots \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)} G_0(z+n). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Si recordamos ahora la definición de la función $G_n(z)$, podemos verificar sin problemas que:

$$G_0(z+n) = \int_0^1 u^{z+n-1} du = \frac{u^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 = \frac{1}{z+n}. \quad (1.16)$$

Usando este último resultado conjuntamente con la definición (1.13) en la identidad (1.15) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{F(z, n)}{n^z} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdots 1}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)(z+n)}, \quad (1.17)$$

o bien,

$$F(z, n) = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdots 1}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)(z+n)} n^z. \quad (1.18)$$

Esta última ecuación nos indica que la función $F(z, n)$ está íntimamente relacionada con la función gamma que definimos a través del límite (1.1). En efecto, podemos apreciar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdots 1}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)(z+n)} n^z = \Gamma(z). \quad (1.19)$$

Hay que recordar que la forma original de la función $F(z, n)$ viene dada por la expresión (1.8), por lo que si usamos dicha expresión para calcular el límite, obtendremos lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (1.20)$$

No es difícil probar que la última integral que aparece en la ecuación anterior converge a una integral impropia en cuyo integrando aparece la función exponencial. De esta manera, podemos ver sin mucho problema que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.21)$$

Puesto que ya hemos visto que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n)$ coincide con la función gamma, esta última igualdad nos muestra que $\Gamma(z)$ coincide con la integral impropia de la ecuación (1.21). Así pues podemos escribir:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.22)$$

la que es una de las representaciones más conocidas de la función gamma de Euler.

Otra representación de la función gamma, tal vez no tan popular como la representación integral, es una que se exprese como un producto infinito, conocida como la definición de Weierstrass de la función gamma. Recordemos la definición de la función gamma como un límite y reescribamos los factores usando la notación de producto. Podemos ver sin mucho problema que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{z+1} \right) \left(\frac{2}{z+2} \right) \cdots \left(\frac{n}{z+n} \right) n^z,$$

lo cual, implica que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^z}{z} \right) \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{z+k} \right). \quad (1.23)$$

Vamos ahora a escribir el recíproco de la función gamma y haremos uso de la identidad $n^z = e^{\ln(n)z}$. Haciendo eso obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{z}{e^{\ln(n)z}} \right) \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} z e^{-\ln(n)z} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k} \right), \quad (1.24)$$

lo cual se puede escribir de manera más elegante como,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} z e^{-\ln(n)z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right). \quad (1.25)$$

Vamos ahora a hacer uso de una identidad de la función exponencial. Dado que ésta tiene la propiedad de que el producto de exponenciales puede verse como la exponencial de la suma de los argumentos, queda claro que

$$\exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{z}{m} \right) = \prod_{m=1}^n e^{z/m}, \quad (1.26)$$

lo que significa que podemos escribir

$$1 = \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{z}{m} \right) \left(\prod_{m=1}^n e^{-z/m} \right). \quad (1.27)$$

Si usamos esta identidad para reescribir la ecuación (1.25), tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} z e^{-\ln(n)z} \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{z}{m} \right) \left(\prod_{m=1}^n e^{-z/m} \right) \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} z \exp \left(\sum_{m=1}^n \frac{z}{m} \right) e^{-\ln(n)z} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

en donde fusionamos los productos que aparecían separados en uno solo. Fusionando, igualmente, las exponenciales en una sola, obtenemos:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} z \exp \left(z \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n) \right] \right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k}. \quad (1.29)$$

En esta última expresión aparecen dos sucesiones que podrían tratarse de manera separada si sus correspondientes límites existieran. Primero observemos la sucesión que aparece dentro de la exponencial fuera del producto. A esta sucesión la llamaremos γ_n y está dada por:

$$\gamma_n := \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n). \quad (1.30)$$

Se debe notar que la suma de los recíprocos de los naturales no es una serie que converja. Pero tampoco lo hace el logaritmo de n cuando n tiende a infinito. Sin embargo, la diferencia de estas cantidades tiende a un límite finito cuyo valor se denomina *constante de Euler-Mascheroni*, y dicha constante se denota por la letra griega γ ,

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n). \quad (1.31)$$

La convergencia se puede demostrar si expresamos la sucesión γ_n como una serie (solo hay que escribir el $\ln(n)$ usando una serie telescópica) y hacemos uso del criterio generalizado del cociente [56]. De esta manera, puesto que en el proceso límite dado por la ecuación (1.29) tenemos un producto de sucesiones convergentes por separado, podemos aplicar la regla de que el límite del producto es el producto de los límites, así tenemos que:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(z \left[\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n) \right] \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-z/k}, \quad (1.32)$$

de manera que podemos escribir la función gamma como

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad (1.33)$$

expresión conocida como la representación como producto infinito de Weierstrass de la función gamma. Vale la pena resaltar el hecho de que ha habido cierta controversia sobre origen de esta representación de la función gamma. Aunque esta representación lleva el nombre de Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, matemático alemán que se suele considerar como el padre del análisis moderno [8], la fórmula (1.33) ha sido adjudicada a varios otros autores. Tal como lo menciona Ricardo Pérez-Marco [49], Philip J. Davis [16] da crédito a F. W. Newman, quien encontró esta factorización de la función gamma en 1848 [43]. Sin embargo, Nörlund [45] y Remmert [51] atribuyen la fórmula a Schlömilch [57] que obtuvo dicha representación en 1843, cinco años antes que Newman. Aycok observó que los cálculos para llegar a la representación del producto ya están contenidos en el trabajo de Euler de 1787 [6, 19]. Dado que Weierstrass [70] desarrolló una teoría general sobre factorización de funciones meromórficas en el plano complejo, se le ha atribuido erróneamente esta representación de la función gamma. No obstante, debido a que esta representación se encuentra dentro del marco de la teoría de Weierstrass, es común que la forma de este tipo de factorización de funciones meromórficas sea referida genéricamente como *productos de Weierstrass*.

Existe otra representación como producto infinito que se puede obtener directamente de la definición a través del límite (1.1),

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z. \quad (1.34)$$

Si en la ecuación anterior escribimos a n , dentro de n^z , como un producto telescópico, obtenemos

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \right)^z. \quad (1.35)$$

Observemos ahora que el cociente,

$$\frac{n+1}{n} \rightarrow 1,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como el límite de la definición (1.1) converge a la función gamma y puesto que el producto de los límites de sucesiones es el límite del producto de las sucesiones si ambos límites existen, entonces, podemos escribir

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \right)^z \left(\frac{n+1}{n} \right)^z. \quad (1.36)$$

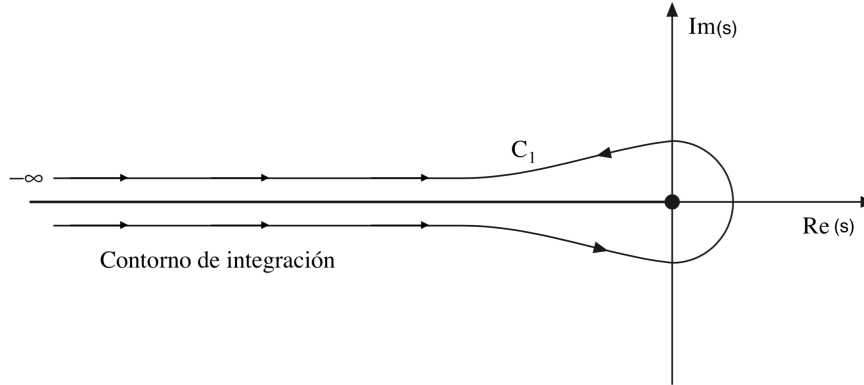


Figura 1.1: Contorno de integración para la representación integral de la función gamma.

De esta manera, podemos reescribir la función gamma como,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z+1} \right) \left(\frac{2}{1} \right)^z \left(\frac{2}{z+2} \right) \left(\frac{3}{2} \right)^z \cdots \left(\frac{n}{z+n} \right) \left(\frac{n}{n-1} \right)^z, \quad (1.37)$$

lo cual, usando la notación de producto, se puede escribir de la siguiente forma

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+z} \left(\frac{k+1}{k} \right)^z. \quad (1.38)$$

Notemos que, en este punto, ya podemos sustituir la operación de límite por un producto infinito, de manera que una segunda representación de la función gamma como producto infinito viene dada por,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+z} \left(\frac{k+1}{k} \right)^z, \quad (1.39)$$

la cual es diferente al producto infinito de Weierstrass. Solo por completar el esquema de representaciones de la función gamma, vale la pena escribir una representación más de la función gamma como una integral en el plano complejo. El inverso de la función gamma se puede escribir como:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} s^{-z} e^s ds, \quad (1.40)$$

donde C_1 es un contorno que encierra el corte de ramificación principal de la función $\text{Log}(z)$, es decir, el seme-eje real negativo del plano complejo s , el cual se puede apreciar en la figura [1.1](#). Esta integral es conocida como integral de Hankel, y en la referencia [\[49\]](#) se encuentra una demostración elegante de esta identidad.

Diferentes representaciones de la función gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.41)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad (1.42)$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad (1.43)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+z} \left(\frac{k+1}{k}\right)^z, \quad (1.44)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} s^{-z} e^s ds. \quad (1.45)$$

1.1.3. Algunos valores especiales

Vamos ahora a calcular los valores de función gamma evaluada en algunos puntos especiales. Uno de los primeros valores obtenidos para la función gamma para valores no enteros de su argumento se debe al mismo Euler, quien logró mostrar [20] que de la función gamma evaluada en $z = 1/2$ se obtiene el valor

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (1.46)$$

algo que se pudo mostrar a través de la fórmula de Walis para el valor de π como producto infinito [16], es decir,

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5}\right) \left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}\right) \left(\frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9}\right) \cdots. \quad (1.47)$$

Vamos a demostrar este resultado de la forma clásica, esto es, a partir de la representación integral de la función gamma,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt. \quad (1.48)$$

Vamos a transformar la integral anterior a la forma de una integral de Gauss. Para esto solo tenemos que aplicar el cambio de variable $t = x^2$, con lo cual se tiene que $dt = 2x dx$,

o bien, $2dx = t^{-1/2} dt$. Con esto tenemos que la integral anterior se transforma en:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx. \quad (1.49)$$

Esta última integral es exactamente $\sqrt{\pi}$ (véase Apéndice [A](#)), con lo cual se muestra que efectivamente:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.50)$$

Una vez que conocemos el valor de la función gamma en algún punto, podemos usar la relación de recurrencia $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ para poder conocer la función gamma valuada en otros puntos. Por ejemplo, conociendo el valor de $\Gamma(z)$ en $z = 1/2$ tenemos que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad (1.51)$$

lo cual nos permite escribir inmediatamente:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (1.52)$$

Esta expresión se puede generalizar para obtener los valores de la función gamma en cualquier semi-entero, esto es,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (1.53)$$

en donde hemos hecho uso de la notación de *doble factorial* para expresar el resultado anterior. Es necesario señalar que la notación doble factorial $n!!$ es usada para señalar la multiplicación de todos los enteros no negativos impares menores o iguales a n , si este es impar, o bien, la multiplicación de todos los enteros pares no negativos menores o iguales a n si éste es par. Específicamente tenemos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(2n-1)!! := (2n-1)(2n-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1, \quad (1.54)$$

$$(2n)!! := (2n)(2n-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2. \quad (1.55)$$

Se puede demostrar que los dobles factoriales se pueden escribir en términos de factoriales simples como:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (1.56)$$

$$(2n)!! = 2^n n! \quad (1.57)$$

La deducción de estas identidades se deja como ejercicio para el lector.

Como mencionamos al principio, diferentes representaciones de la misma función pueden dar idea acerca de su comportamiento o resaltar propiedades que no son aparentes con otras representaciones. Este es el caso de la representación de Weierstrass de la función gamma como producto infinito. Esta representación es particularmente útil debido a que nos indica los polos de la función gamma. Recordando esta representación de la función gamma, tenemos que:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}. \quad (1.58)$$

No es difícil apreciar de la expresión anterior que, cuando la variable z es un entero negativo o cero, el inverso de la función gamma desaparece, i.e.,

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, \quad (1.59)$$

para $z = -n$ con $n \in \mathbb{N}_0$. Esto quiere decir que la función gamma $\Gamma(z)$ en $z = -n$ tiene algún tipo de singularidad. De hecho, la representación de Weierstrass nos muestra claramente que estas singularidades son, en realidad, polos simples.

1.1.4. La fórmula de reflexión

Hasta ahora hemos podido obtener tres representaciones alternativas a la definición de la función gamma. Cualquiera de estas identidades es equivalente a las otras, de modo que podemos emplearlas para investigar las propiedades de la función gamma. Una de las propiedades más importantes es la llamada *fórmula de reflexión* de la función gamma, la cual viene dada por:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.60)$$

Vamos a demostrar esta identidad a partir de la representación integral de la función gamma. Comencemos escribiendo el producto de las funciones gamma en términos de su representación integral (1.22),

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-z} ds. \quad (1.61)$$

Por el teorema de Fubini, sabemos que el producto de las integrales lo podemos ver como una integral doble. Así, al combinar la integrales obtenemos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-t-s} t^{z-1} s^{-z} dt ds. \quad (1.62)$$

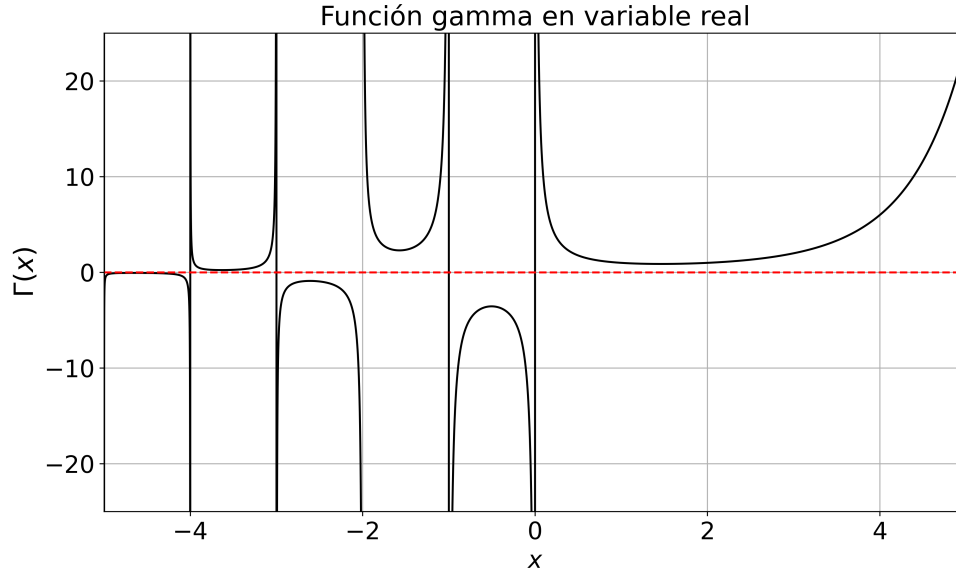


Figura 1.2: Gráfica de la función gamma en el eje real. Podemos ver que, para valores de x mayores que $x = 1$, la función gamma crece y, de hecho, lo hace más que exponencialmente, como se verá más adelante. Para valores de x enteros no positivos (es decir, enteros negativos incluyendo el cero), tenemos que la función gamma diverge. Estas divergencias son claras a partir de la representación como producto infinito de Weierstrass, en la Ec. (1.58).

Hagamos ahora un cambio de variables mediante la transformación siguiente: $u = s + t$, $v = s/t$. Notemos que la transformación inversa viene dada por:

$$s = \frac{uv}{v+1}, \quad t = \frac{u}{v+1}. \quad (1.63)$$

No es difícil demostrar que el jacobiano de la transformación (1.63) viene dado por:

$$J = \frac{\partial(t, s)}{\partial(u, v)} = \frac{u}{(v+1)^2}. \quad (1.64)$$

Con todo esto, tenemos que la doble integral (1.62) se puede escribir como:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{v+1} \right)^{z-1} \left(\frac{uv}{v+1} \right)^{-z} \frac{u}{(v+1)^2} du dv. \quad (1.65)$$

Si invocamos nuevamente el teorema de Fubini, podemos separar la integral doble en dos integrales unidimensionales, lo que es posible ya que el integrando puede factorizarse como dos funciones, una que depende solo de la variable u y la otra solo de la variable v . Haciendo esto, obtenemos:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^\infty \frac{v^{-z}}{v+1} dv. \quad (1.66)$$

En la ecuación anterior, la primer integral es fácil de evaluar y, de hecho, su valor es uno. La segunda de las integrales (la que tiene como variable de integración v) es un poco más difícil, pero aun su valor se puede calcular de manera exacta mediante técnicas de variable compleja. No es difícil comprobar que:

$$\int_0^\infty \frac{v^{-z}}{v+1} dv = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.67)$$

Este resultado nos permite escribir de manera inmediata la fórmula de reflexión que anticipamos en la ecuación (1.60),

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.68)$$

1.2. Las funciones digamma y poligamma

Como ya habíamos mencionado anteriormente, la función gamma y las funciones relacionadas con la función gamma, juegan un papel importante en varias áreas de la física y las matemáticas. Vamos a introducir una función, derivada del logaritmo de la función gamma, que tiene relación con varios problemas matemáticos aún sin resolver. La función digamma es una función definida como la derivada logarítmica de la función gamma, y se relaciona directamente con la constante γ de Euler-Mascheroni, así como con los números armónicos. Más adelante definiremos una generalización de la función digamma, llamada función poligamma que se relacionará de manera directa con una función emblemática de problemas abiertos en matemáticas: la función zeta de Riemann. No vamos a explorar los problemas matemáticos relacionados con estas funciones, solo nos limitaremos a definir las y explorar sus propiedades más elementales.

1.2.1. La función digamma

La función digamma es definida como la derivada del logaritmo natural de la función gamma, función que se denota como $\psi(z)$, esto es,

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)). \quad (1.69)$$

Antes de ver las propiedades de la función digamma, que no es más que la derivada logarítmica de la función gamma, es interesante analizar el comportamiento asintótico del

logaritmo de la función gamma, $\Gamma(z)$, para valores de z reales y grandes. A la postre, este resultado nos permitirá inferir el comportamiento de $\psi(z)$ en el mismo contexto.

Comencemos escribiendo la función factorial de z en su forma integral, esto es:

$$z! = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx. \quad (1.70)$$

Ahora, realizamos el cambio de variables $x = zy$, con lo cual obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z! &= \int_0^\infty e^{z \ln(x) - x} dx = z \int_0^\infty e^{z \ln(zy) - zy} dy \\ &= z \int_0^\infty e^{z \ln(z) + z \ln(y) - zy} dy \\ &= z e^{z \ln z} \int_0^\infty e^{z(\ln y - y)} dy. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Esta última expresión para la función factorial de z es importante, porque así podemos aplicar el popular método de Laplace [37] que permite obtener aproximaciones de integrales de la forma:

$$\int_a^b e^{M f(x)} dx, \quad (1.72)$$

cuando el valor de M es muy grande. Una descripción elemental del método de Laplace se expone en el Apéndice A.1

Aplicando el método de Laplace, no es difícil darse cuenta de que la última integral que aparece dentro de la expresión (1.71), puede aproximarse, para z grande, como:

$$\int_0^\infty e^{z(\ln y - y)} dy \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z}, \quad (1.73)$$

lo cual nos permite escribir la siguiente aproximación para la función factorial:

$$z! \approx z e^{z \ln z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z}, \quad (1.74)$$

o bien,

$$z! \approx \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z, \text{ para } z \gg 1, \quad (1.75)$$

que es la, así denominada, fórmula de Stirling.

Esta aproximación nos permite ver que, cuando $z \gg 1$, el logaritmo de $z!$ puede aproximarse como:

$$\ln(z!) \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi z) + z \ln\left(\frac{z}{e}\right). \quad (1.76)$$

En la figura 1.3 podemos ver una gráfica del logaritmo de la función gamma en variable real, y cómo se compara con la aproximación de Stirling.

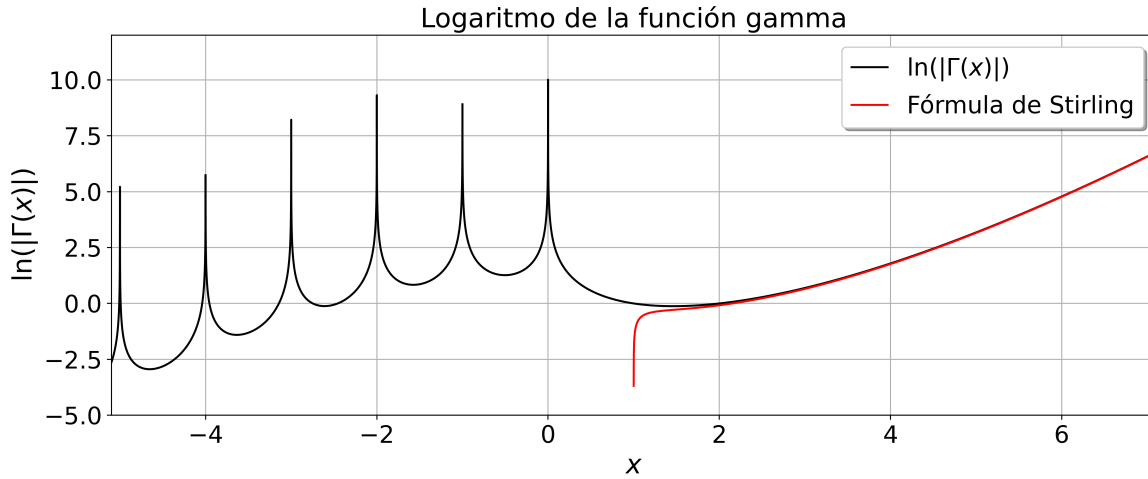


Figura 1.3: Gráfica del logaritmo de la función gamma en variable real comparada con la fórmula de Stirling. La línea negra representa el logaritmo de la función gamma mientras que la línea roja representa la aproximación de Stirling de la ecuación (1.76). Podemos ver que ambas líneas se sobreponen para valores cada vez más grandes de la variable x .

La expresión asintótica para $\ln(z!)$ de la ecuación (1.76) es un resultado que nos permite ver particularmente cómo se comporta la derivada de $\ln(z!)$ cuando z va a infinito:

$$\frac{d \ln(z!)}{dz} \approx \frac{1}{2z} + \ln\left(\frac{z}{e}\right) + 1. \quad (1.77)$$

Como $z \gg 1$ tenemos que $1/z \rightarrow 0$ y así, podemos escribir simplemente

$$\frac{d \ln(z!)}{dz} \approx \ln\left(\frac{z}{e}\right) + 1. \quad (1.78)$$

Este resultado muestra que la derivada de $\ln(z!)$ se va lentamente al infinito con $z \rightarrow \infty$, es decir, de manera logarítmica. Dicho de otra forma, la función digamma $\psi(z)$ diverge cuando $z \rightarrow \infty$. Además, las singularidades de la función gamma se heredan en la función $\ln(z!)$ y consecuentemente en sus derivadas sucesivas. Esto quiere decir que la función

digamma tendrá igualmente singularidades en los valores enteros negativos, y en el origen.

Vamos ahora a obtener una representación explícita de la función digamma como desarrollo en serie de potencias. Es de particular utilidad calcular la expresión explícita mencionada de la función digamma evaluada en $z + 1$:

$$\psi(z + 1) = \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z + 1)) = \frac{d}{dz} \ln(z\Gamma(z)), \quad (1.79)$$

lo cual, haciendo uso de la definición como límite de la función gamma, podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \psi(z + 1) &= \frac{d}{dz} \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \ln \left(\frac{n!}{(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left[z \ln(n) + \ln(n!) - \ln(z + 1) - \ln(z + 2) - \dots - \ln(z + n) \right], \end{aligned} \quad (1.80)$$

lo cual resulta en:

$$\psi(z + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{z + 2} - \frac{1}{z + 3} - \dots - \frac{1}{z + n} \right), \quad (1.81)$$

o bien, de manera equivalente, la función digamma se puede escribir como sigue,

$$\psi(z + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z + k} \right). \quad (1.82)$$

Es importante notar la relación que guarda la función digamma con los números armónicos. Si evaluamos la función digamma $\psi(z + 1)$ en $z = 0$ obtenemos:

$$\psi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = -\gamma, \quad (1.83)$$

es decir, $-\psi(1)$ resulta ser la constante de Euler-Mascheroni. Recordemos que los números armónicos se definen como los valores de la suma del recíproco de los enteros no negativos,

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (1.84)$$

Si sustraemos y sumamos los números armónicos a la función digamma durante el proceso límite, podemos reescribir esta última como sigue,

$$\begin{aligned}\psi(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - H_n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln(n) - H_n + \sum_{k=1}^n \frac{z}{k(z+k)} \right),\end{aligned}\tag{1.85}$$

lo cual implica que

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(z+k)}.\tag{1.86}$$

Esta última expresión es particularmente importante, ya que nos permite ver sin mucha dificultad que, al evaluar la función digamma en enteros no negativos $z = n$, se tiene una conexión directa con los números armónicos,

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n.\tag{1.87}$$

1.2.2. La función poligamma

Al igual que la función digamma, las funciones poligamma se definen como derivadas logarítmicas de orden superior de la función gamma. Si denotamos por $\psi^{(m)}(z)$ la función poligamma de orden m , entonces,

$$\psi^{(m)}(z+1) := \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln(\Gamma(z+1)).\tag{1.88}$$

Si empleamos la serie (1.86) obtenida para la función digamma, podemos obtener una serie equivalente para la función poligamma:

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(z+1) &= \frac{d^m}{dz^m} (\psi(z+1)). \\ &= \frac{d^m}{dz^m} \left(-\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right) \right).\end{aligned}\tag{1.89}$$

De este modo, obtenemos la siguiente representación de la función poligamma

$$\psi^{(m)}(z+1) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{m+1}}.\tag{1.90}$$

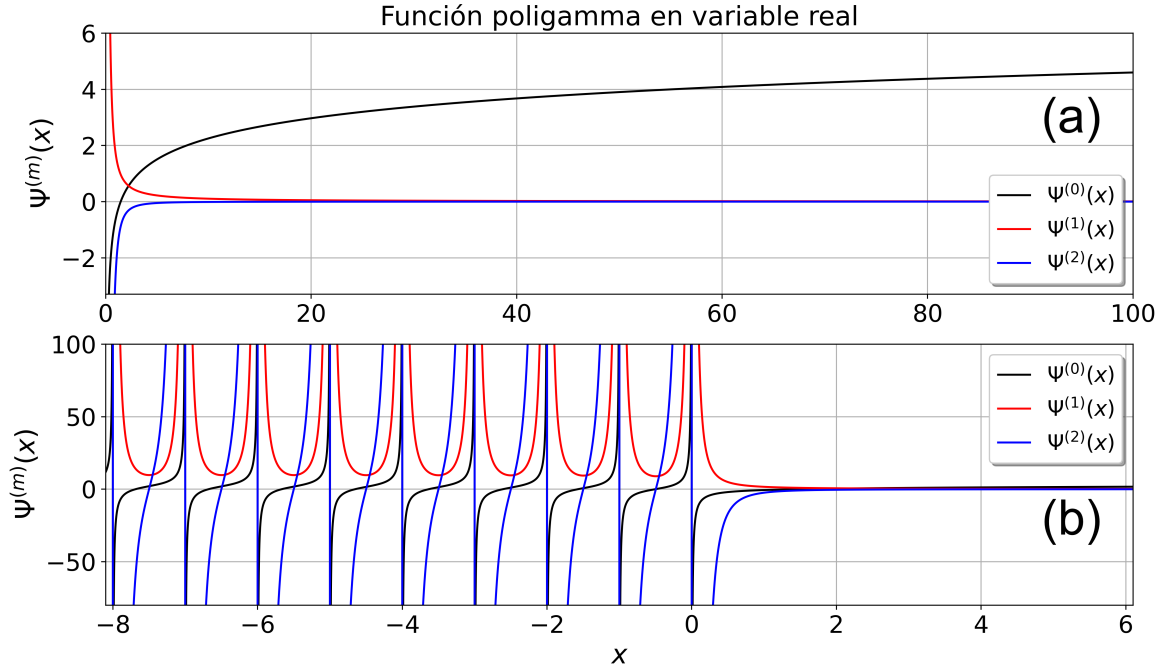


Figura 1.4: Gráficas de las funciones poligamma. En el panel (a), podemos ver las funciones poligamma de orden $m = 0$ (o función digamma) representada por la línea negra, la función poligamma de orden $m = 1$ (línea roja) y la de orden $m = 2$ (línea azul). Podemos apreciar cómo la función digamma diverge en forma logarítmica cuando $x \rightarrow \infty$. En el panel (b), podemos ver las mismas funciones poligamma mostrando las singularidades en los valores enteros negativos y en el origen, propiedad que se hereda por las singularidades de la función gamma en dichos valores.

Un hecho interesante de esta función $\psi^{(m)}(z + 1)$ es que, cuando la evaluamos en $z = 0$ obtenemos una serie que resulta ser la así llamada función zeta de Riemann,

$$\psi^{(m)}(1) = (-1)^{m+1} m! \zeta(m+1), \quad (1.91)$$

para $m \geq 1$, donde $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función zeta de Riemann, definida como:

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}. \quad (1.92)$$

Esta expresión para la función poligamma $\psi^{(m)}(z + 1)$, valuada en $z = 0$, nos permite escribir el desarrollo en serie de Taylor de la función digamma de alrededor de $z = 0$. Esto es debido a que

$$\psi(z + 1) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)}(1) \frac{z^k}{k!}, \quad (1.93)$$

lo que nos lleva, junto con la identidad (1.91), a la expresión:

$$\psi^{(0)}(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) z^k. \quad (1.94)$$

A partir de este desarrollo en serie de Taylor y de la identidad (1.91), podemos verificar directamente que el desarrollo en serie para $\psi^{(m)}(z+1)$ viene dado por:

$$\psi^{(m)}(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{m+k+1} \frac{(m+k)!}{k!} \zeta(m+k+1) z^k, \quad \text{para } m \geq 1. \quad (1.95)$$

1.3. La función zeta de Riemann

En este punto vale la pena establecer algunas propiedades generales de la función zeta de Riemann por su relevancia en varias áreas de la física y las matemáticas. Como mencionamos en la sección anterior, la función zeta $\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida en términos de una suma infinita como:

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \quad (1.96)$$

Primero que nada, es conveniente mencionar que la función zeta de Riemann tiene una relación muy cercana, y bastante significativa, con la teoría de números. Esto se debe, principalmente, a la relación de $\zeta(s)$ con la distribución de los números primos. La primera conexión de la función $\zeta(s)$ con los números primos se debe, precisamente, a Euler, quien mostró que la función zeta de Riemann puede escribirse como un producto infinito de funciones que involucra, exclusivamente, a los números primos:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (1.97)$$

siendo $\mathbb{P}$ el conjunto de los números primos. La demostración de esta identidad se basa en la serie geométrica, así como en el teorema fundamental de la aritmética⁴, y su demostración se puede encontrar en algunos libros básicos de funciones especiales. Dejamos al lector la tarea de verificar la identidad (1.97).

⁴El teorema fundamental de la aritmética, también llamado teorema de factorización única (o teorema de factorización prima), establece que todo número entero mayor que 1 puede representarse, únicamente como producto de números primos, hasta el orden de los factores. Es importante mencionar que históricamente, según referencia [2], el teorema fundamental de la aritmética tiene su origen en los *Elementos* de Euclides, aunque no aparece dicho teorema en su forma completa. Fue Kamāl al-Dīn al-Fārisī quien dio la primera versión del teorema de la descomposición prima. Más tarde, Gauss presentó una demostración moderna de dicho teorema en sus *Disquisitiones Arithmeticae* [24].

La función zeta se ha relacionado con varias otras funciones matemáticas y se han desarrollado múltiples representaciones además de varias relaciones funcionales. Por ejemplo, la función zeta tiene una representación integral que se puede demostrar utilizando propiedades de la función gamma:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\exp(x) - 1} dx. \quad (1.98)$$

Además de representaciones alternativas, la función zeta de Riemann tiene una relación directa con los, así llamados, números de Bernoulli. Los números de Bernoulli son elementos de una sucesión de números naturales que están íntimamente relacionados con la teoría de números y particularmente con la función zeta de Riemann. Hay varias formas de introducir los números de Bernoulli, denotados por B_m^- ^[5], pero es común definirlos a partir de una función generatriz, es decir, como coeficientes de un desarrollo en serie de potencias de una función específica:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^- t^m}{m!}. \quad (1.99)$$

Podría decirse que la aplicación más importante de los números de Bernoulli es su uso en la fórmula de Euler-Maclaurin ^[27]. Suponiendo que f es una función suficientemente diferenciable, la fórmula de Euler-Maclaurin puede escribirse como:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k^-}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + R(f, m), \quad (1.100)$$

siendo $R(f, m)$ un residuo que depende del orden de la aproximación y de la función misma. Los números de Bernoulli se relacionan con la función zeta a través de la identidad,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} (2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad (1.101)$$

lo cual ofrece valores de la función zeta para enteros pares positivos.

La función zeta de Riemann se puede prolongar analíticamente para todo número complejo s , excepto en $s = 1$ ^[6], mediante la siguiente ecuación funcional:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (1.102)$$

⁵Hay dos clases de números de Bernoulli, los B_m^- y los B_m^+ , los cuales se diferencian únicamente en que $B_0^- = -1/2$ y que $B_0^+ = 1/2$.

⁶En $s = 1$ claramente la serie ^(1.96) diverge y por lo tanto en dicho punto la función $\zeta(s)$ no puede ser analítica.

La demostración de esta identidad se basa en una propiedad sobre integrales que se puede deducir a partir de propiedades básicas de integración.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\ &+ \left(a - [a] - \frac{1}{2} \right) f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) f(b), \end{aligned} \quad (1.103)$$

donde $[x]$ denota la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. La demostración de esta identidad se basa en técnicas elementales de integración y se deja como ejercicio para el lector.

Aplicando la identidad (1.195) a $f(x) = x^{-s}$ obtenemos directamente la siguiente representación de la función zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{(x - [x] - \frac{1}{2})}{x^{1+s}} dx + \frac{1}{2}. \quad (1.104)$$

Esta identidad es válida para todos los valores de $s \in \mathbb{C}$ tales que $\text{Re}(s) > 0$. En este punto se debe notar que:

$$\int_0^1 \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{1+s}} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.105)$$

Esta última identidad nos permite reescribir la identidad (1.105) para la función zeta en términos de una sola integral:

$$\zeta(s) = s \int_0^\infty \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{1+s}} dx. \quad (1.106)$$

Notemos ahora que el desarrollo en serie de Fourier de la función $[x] - x + 1/2$ puede escribirse como:

$$[x] - x + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}. \quad (1.107)$$

Este desarrollo en serie se puede sustituir dentro de la representación integral de la función zeta dada por la expresión (1.106) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi} \frac{1}{x^{1+s}} dx = s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{1+s}} dx \\ &= s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi n)^s}{n\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u^{1+s}} du = 2^s \pi^{s-1} s \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} \right) \int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u^{1+s}} du. \end{aligned} \quad (1.108)$$

En esta última igualdad podemos reconocer inmediatamente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}} = \zeta(1-s). \quad (1.109)$$

Por otro lado, no es difícil demostrar que la integral resulta en [c.f. ejercicio 11]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u^{1+s}} du = \frac{1}{s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s). \quad (1.110)$$

Con estos resultados, es posible ver que la función zeta de Riemann obedece la identidad:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (1.111)$$

que es la identidad que queríamos demostrar. El lector interesado en esta relación funcional puede consultar el libro de Titchmarsh y Heath-Brown [62], en el que se pueden encontrar al menos siete formas alternativas de deducir esta identidad, además de muchos otros resultados interesantes.

Además de prolongar analíticamente la función zeta de Riemann, la identidad (1.111) nos muestra unas cuantas propiedades adicionales. Primero, una mera inspección de esta relación funcional nos muestra que la función zeta tiene un polo simple en $s = 1$, además de tener ceros en los enteros pares negativos. Esto se sigue inmediatamente de la expresión (1.111) debido a que la función $\Gamma(1-s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ y debido a que el factor $\sin(\pi s/2)$ desaparece en los valores de s reales tales que $s = 2k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Se suele referir a estos valores del plano complejo como los *zeros triviales* de la función zeta de Riemann. La misma relación funcional (1.111), por otro lado, nos muestra, con un poco más de esfuerzo, que $\zeta(s)$ tiene otras raíces, a las cuales se les denomina *no triviales*, en la franja $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ [62]. De hecho, Jaques Hadamard [28] y Charles Jean de la Vallée Poussin [17] mostraron, en forma independiente, que los zeros no triviales de $\zeta(s)$ no ocurren en $\operatorname{Re}(s) = 1$, por lo que dichos ceros deben encontrarse en la banda abierta $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ [7] del plano complejo.

Es claro que la relación entre la función zeta y los números primos, además de las relaciones con otras funciones, hacen que la función zeta sea una función de mucho interés práctico en la física-matemática. Sin embargo, esta función es además interesante debido a que sobre esta recae uno de los problemas abiertos más importantes en la matemática contemporánea: la llamada *hipótesis de Riemann*.

La hipótesis de Riemann es una conjetura que afirma que todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann tienen la parte real igual a $1/2$. Esta hipótesis tiene una profunda

⁷La relación funcional (1.111) es una fórmula de reflexión, de la cual se puede deducir que la línea $\operatorname{Re}(s) = 0$ del plano complejo tampoco contiene los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

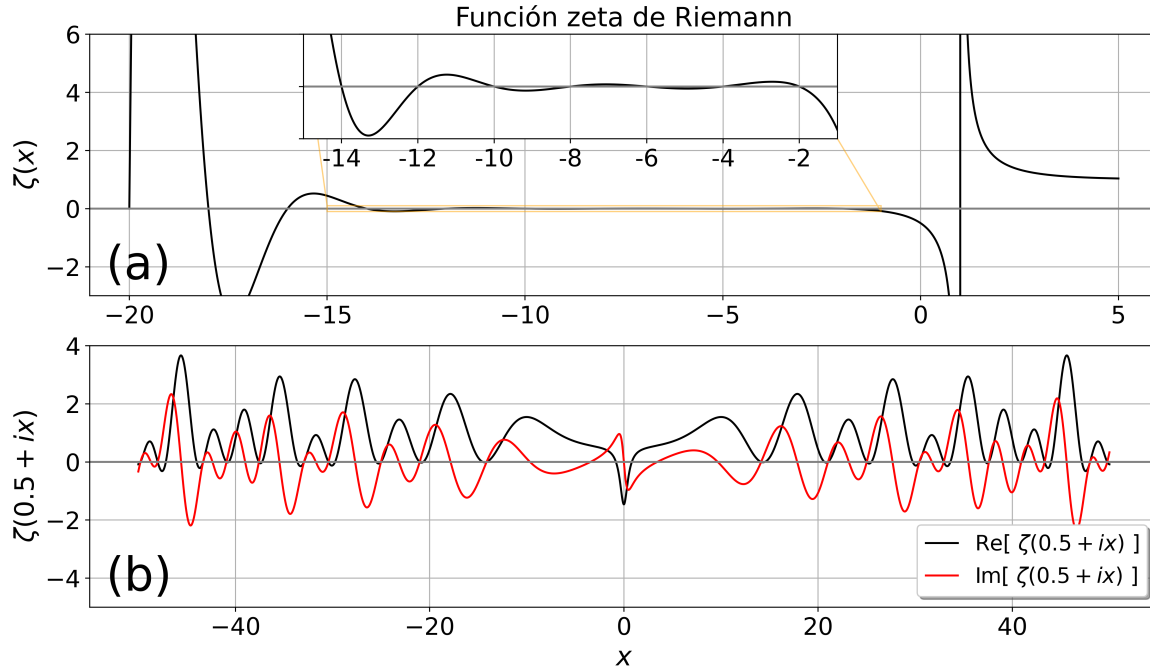


Figura 1.5: Gráficas de la función zeta de Riemann. (a) Se muestra la función $\zeta(x)$ con x como variable real. En este panel se puede verificar la presencia de los ceros triviales de la función zeta de Riemann: todos ocurren, como se esperaba, en los enteros pares negativos. (b) Se muestra la función zeta, en su parte real (línea negra) e imaginaria (línea roja), a lo largo de la recta crítica $0.5 + ix$, con $x \in [-50, 50]$. Podemos ver que las partes real e imaginaria de función zeta se anulan simultáneamente en algunos valores de x , tal como lo establece la hipótesis de Riemann.

influencia en la teoría de los números, especialmente en la distribución de los números primos. Esto es debido a que, entre otras propiedades, la función zeta de Riemann se relaciona directamente con la distribución de números primos. La función contador de números primos, $\pi(x)$, es definida como la cantidad de números primos menores o iguales a x y se puede escribir como:

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}, \quad (1.112)$$

donde el operador $\#$ se refiere a la cardinalidad del conjunto. No es difícil demostrar que la función zeta de Riemann y la función contador de números primos se relacionan a través de la siguiente igualdad:

$$\ln(\zeta(s)) = \int_2^\infty \frac{s\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx. \quad (1.113)$$

Si la hipótesis de Riemann se cumple, entonces, el término error que aparece en el teorema de los números primos puede acotarse de la mejor manera posible. El teorema de los

números primos, que fue conjeturado por Legendre y por Gauss y demostrado formalmente por Jaques Hadamard [28] y Charles Jean de la Vallée Poussin [17] ⁸, establece que la función contador de números primos tiene el comportamiento asintótico:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}, \quad (1.114)$$

para x tendiendo a infinito. En realidad, Hadamard y de la Vallée-Poussin demostraron no solo el resultado de Gauss, sino que reforzaron dicho resultado estableciendo que:

$$\pi(x) \approx \text{Li}(x), \quad (1.115)$$

donde $\text{Li}(x)$ es una función denominada *logaritmo integral*, definida como:

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}. \quad (1.116)$$

Concretamente, Helge von Koch demostró, en 1901 [65], que si la hipótesis de Riemann se cumple, entonces, el término error sería del orden de raíz de x dividido por el logaritmo natural de x , es decir:

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \ln x). \quad (1.117)$$

Representaciones de la función zeta de Riemann y algunas propiedades

$$\zeta(z) = \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad (1.118)$$

$$\zeta(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (1.119)$$

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\exp(x) - 1} dx, \quad (1.120)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (1.121)$$

$$\zeta(s) = s \int_0^{\infty} \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{1+s}} dx, \quad (1.122)$$

$$\ln(\zeta(s)) = \int_2^{\infty} \frac{s\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx. \quad (1.123)$$

⁸Para la demostración de este resultado se utiliza el hecho de que la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ no tiene zeros en la línea $\text{Re}(s) = 1$, el resultado citado arriba en relación con los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

1.4. La función beta

Al deducir la fórmula de reflexión de la función gamma, nos dimos cuenta de que el producto de dos funciones gamma puede escribirse en términos de integrales definidas, las cuales nos fue posible evaluar en ese caso particular. Resulta que cuando tomamos el producto de dos funciones gamma, en general tendremos que dicho producto puede escribirse como una sola integral definida. Esta integral define en realidad toda una importante familia de integrales que continuamente aparecen en el desarrollo de otras funciones especiales, y por lo tanto, de mucha importancia en la física matemática.

En términos de la función gamma, la función beta de Euler, $B : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, se define como

$$B(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (1.124)$$

Al igual que en el caso de la función gamma, vamos a buscar representaciones alternativas de la función beta con la finalidad de obtener otras propiedades. Comencemos escribiendo el producto de funciones gamma haciendo uso de su representación integral,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-s} s^{q-1} ds \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-s} t^{p-1} s^{q-1} ds dt, \end{aligned} \quad (1.125)$$

en donde hemos hecho uso del teorema de Fubini para combinar las integrales en una doble integral. Haciendo ahora el cambio de variable $t = x^2$ y $s = y^2$, es fácil ver que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dy dx. \quad (1.126)$$

Notemos que la integral anterior es una integral doble cuyo dominio de integración es el cuadrante positivo en $\mathbb{R}^2$. Si hacemos un cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, entonces, tenemos que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} (r \cos(\theta))^{2p-1} (r \sin(\theta))^{2q-1} r d\theta dr. \quad (1.127)$$

Notemos que el integrando de esta última ecuación se puede factorizar como el producto de dos funciones, una que solo depende de r y otra que solo depende de θ . Esto nos permite separar la doble integral como el producto de dos integrales individuales, es decir,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-2} r dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta \right). \quad (1.128)$$

No es difícil probar que la integral que se realiza a lo largo de la coordenada r es, hasta en un factor constante, la función gamma evaluada en $p + q$ (solo hay que usar el cambio de variable $t = r^2$). Con esta observación tenemos que

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta, \quad (1.129)$$

es decir, la función beta, puede representarse como una integral definida de la siguiente forma

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta. \quad (1.130)$$

Haciendo algunas transformaciones de coordenadas, la función beta puede representarse de diversas maneras, entre las cuales se encuentran, por ejemplo,

$$B(p+1, q+1) = 2 \int_0^1 x^{2p+1} (1-x^2)^q dx, \quad (1.131)$$

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt, \quad (1.132)$$

$$B(p+1, q+1) = \int_0^\infty \frac{u^p}{(1+u)^{p+q+2}} du. \quad (1.133)$$

La deducción de las fórmulas (1.131), (1.132) y (1.133) solo requiere sucesivos cambios de variables. Para pasar de la identidad (1.130) a (1.131) solo necesitamos hacer el cambio de variable $x = \cos(\theta)$. Para obtener (1.131) a partir de la igualdad (1.132) hay que hacer la sustitución $t = x^2$, mientras que para llegar a la identidad (1.133) a partir de (1.132) necesitamos hacer el cambio de variable $t = u/(1+u)$. Vamos a dejar al lector la verificación de estas fórmulas.

1.4.1. La fórmula de duplicación de Legendre

Una propiedad interesante que se obtiene a través del uso de la función beta es la bien conocida *fórmula de duplicación de Legendre*. Esta es una relación funcional para la función gamma, cuya deducción se puede obtener a partir de un caso especial de la función beta.

Evaluando la función beta en $p = z - 1/2$ y $q = z - 1/2$ en la representación dada por la ecuación (1.131), obtenemos:

$$B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{z-1/2} (1-t)^{z-1/2} dt. \quad (1.134)$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $t = (1 + s)/2$, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+s}{2}\right)^{z-1/2} \left(1 - \frac{1+s}{2}\right)^{z-1/2} ds \\ &= 2^{-2(z-1/2)-1} \int_{-1}^1 (1+s)^{z-1/2} (2 - (1+s))^{z-1/2} ds, \end{aligned} \quad (1.135)$$

lo cual resulta en,

$$B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = 2^{-2z} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{z-1/2} ds, \quad (1.136)$$

y puesto que el integrando es simétrico alrededor del origen, resulta claro que podemos escribir la integral en la forma,

$$B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = 2^{-2z+1} \int_0^1 (1-s^2)^{z-1/2} ds. \quad (1.137)$$

Si observamos detenidamente esta última expresión, podemos ver que la integral que aparece en el miembro derecho de la igualdad corresponde a una función beta en su representación dada por la ecuación (1.132). Haciendo esta identificación es fácil darse cuenta de que,

$$B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = 2^{-2z+1} \int_0^1 (1-s^2)^{z-1/2} ds = 2^{-2z} B\left(\frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right). \quad (1.138)$$

Si escribimos la igualdad solo entre las funciones beta involucradas y recordamos la definición de la función beta en términos de la función gamma, podremos ver que,

$$B\left(z + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z + 1)} = 2^{-2z} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z + 1)} = 2^{-2z} B\left(\frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right),$$

de lo cual se sigue inmediatamente que

$$\frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z + 1)} = \frac{2^{-2z} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z + 1)}.$$

De esta manera, hemos comprobado que la función gamma satisface la siguiente identidad, conocida como la *fórmula de duplicación de Legendre*,

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(z + 1) = 2^{-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z + 1), \quad (1.139)$$

en donde hemos hecho uso de un resultado bien conocido de la función gamma: cuando la función gamma es evaluada en $1/2$, el resultado es la raíz de π , esto es,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (1.140)$$

1.5. Otras funciones especiales

Hasta ahora hemos visto que la función gamma nos ha proporcionado un pilar sobre el que se han construido otras funciones especiales como la función beta o la familia de las funciones poligamma. Ahora estudiaremos una colección de funciones que se relacionan íntimamente con la función gamma y que son de mucha utilidad en cuestiones prácticas.

1.5.1. Las funciones gamma incompleta superior e inferior

Las funciones gamma incompletas superior e inferior son tipos de funciones especiales que surgen como soluciones a diversos problemas matemáticos, como ciertas integrales. Sus nombres se derivan de sus definiciones en términos de integrales similares a la de la función gamma, pero con límites “incompletos”. La función gamma se define como una integral de cero a infinito. Esto contrasta con la función gamma incompleta inferior, que se define como una integral de cero a un límite superior variable. De manera similar, la función gamma incompleta superior se define como una integral de un límite inferior variable hasta infinito.

La *función gamma incompleta superior*, la cual se denota por $\Gamma(z, x)$, se define como:

$$\Gamma(z, x) := \int_x^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (1.141)$$

mientras que la *función gamma incompleta inferior*, la cual se denota por $\gamma(z, x)$, se define como:

$$\gamma(z, x) := \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (1.142)$$

En ambos casos la variable z es una variable compleja, de tal manera que su parte real es positiva. No es difícil darse cuenta de estas definiciones que la suma de las funciones gamma incompletas superior e inferior nos da como resultado la función gamma, esto es,

$$\Gamma(z, x) + \gamma(z, x) = \Gamma(z). \quad (1.143)$$

Aunado a lo anterior, también es claro que la función gamma, $\Gamma(z)$, puede recuperarse de las funciones gamma incompletas superior e inferior de la siguiente forma:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \gamma(z, x), \quad (1.144)$$

A partir de integración por partes de las expresiones (1.142) y (1.142) para $\gamma(z, x)$ y $\Gamma(z, x)$, podemos obtener las siguientes propiedades elementales de las funciones gamma

incompletas:

$$\gamma(z+1, x) = z\gamma(z, x) - x^z e^{-x}, \quad (1.145)$$

$$\Gamma(z+1, x) = z\Gamma(z, x) + x^z e^{-x}. \quad (1.146)$$

La función gamma incompleta inferior y la función gamma incompleta superior, definidas anteriormente para z y x reales positivos, pueden desarrollarse en funciones analíticas con respecto a x y z , las cuales están definidas para casi todas las combinaciones de x y z complejos. A continuación, vamos a explorar desarrollos en serie de estas funciones aprovechando las relaciones de recurrencia dadas en las ecuaciones (1.145) y (1.146). Comencemos con la función gamma incompleta inferior. No es difícil darse cuenta de que al iterar “hacia arriba” la expresión (1.145) obtenemos:

$$\begin{aligned} \gamma(z, x) &= \frac{\gamma(z+1, x)}{z} + \frac{x^z e^{-x}}{z} \\ &= \frac{1}{z} \left(\frac{\gamma(z+2, x)}{z+1} + \frac{x^{z+1} e^{-x}}{z+1} \right) + \frac{x^z e^{-x}}{z} \\ &= \frac{\gamma(z+2, x)}{z(z+1)} + \frac{x^{z+1} e^{-x}}{z(z+1)} + \frac{x^z e^{-x}}{z} \\ &= \frac{\gamma(z+3, x)}{z(z+1)(z+2)} + \frac{x^{z+2} e^{-x}}{z(z+1)(z+2)} + \frac{x^{z+1} e^{-x}}{z(z+1)} + \frac{x^z e^{-x}}{z} \\ &\vdots \\ &= \frac{\Gamma(z)\gamma(z+n, x)}{\Gamma(z+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(z)x^{z+k}e^{-x}}{\Gamma(z+k+1)}. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Ahora, cuando hacemos tender n al infinito tenemos que el primer término de la última igualdad en la expresión anterior se va a cero, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(z+n, x)}{\Gamma(z+n)} = 0. \quad (1.148)$$

Con esto, tenemos, entonces, que la función gamma incompleta inferior se puede escribir como el siguiente desarrollo en serie:

$$\gamma(z, x) = x^z \Gamma(z) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(z+k+1)}. \quad (1.149)$$

Dado que $\Gamma(z+k)$ crece muy rápidamente cuando $k \rightarrow \infty$, y por el hecho de que el $1/\Gamma(z)$ es una función entera, tenemos que los coeficientes de la serie en la expresión (1.149) están bien definidos y, por lo tanto, la suma converge uniformemente para todos los complejos

z y x . Algunas veces, la serie en la ecuación (1.149) sin el factor $x^z \Gamma(z)$ suele denotarse como $\gamma^*(z, x)$, esto es:

$$\gamma^*(z, x) := e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(z + k + 1)}. \quad (1.150)$$

Un teorema de Weierstrass [41] indica que si $\{f_n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de funciones analíticas en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ tal que f_n converge a una función f uniformemente en todos los subconjuntos compactos de Ω conforme $n \rightarrow \infty$, entonces, f es analítica en Ω . Dado que la serie $\gamma^*(z, x)$ converge uniformemente, tenemos que $\gamma^*(z, x)$ es entera, es decir, es analítica en todo $z \in \mathbb{C}$ con x fijo y viceversa, es analítica en todo $x \in \mathbb{C}$ con z fijo. Por el teorema de Hartogs⁹, que indica que si una función es analítica en cada variable, entonces, es analítica en forma conjunta, por lo tanto, $\gamma^*(z, x)$ es analítica en todo $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

El hecho de que la función $\gamma^*(z, x)$ es analítica implica que la función gamma inferior es analítica, lo cual es una consecuencia de la descomposición de $\gamma(z, x)$ como

$$\gamma(z, x) = x^z \Gamma(z) \gamma^*(z, x), \quad (1.151)$$

que extiende la definición original de la función gamma inferior a todo $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ como una función analítica.

Una forma directa de obtener desarrollos en serie de potencias para las funciones gamma incompletas es desarrollando la función exponencial en serie e integrando término a término, lo que resulta en:

$$\Gamma(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{z+k-1}}{k!} dt \quad (1.152)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{z+k}}{k!(z+k)} = x^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!(z+k)}, \quad (1.153)$$

lo que nos permite escribir la función $\gamma^*(z, x)$ como el siguiente desarrollo en serie de potencias de en la variable x :

$$\gamma^*(z, x) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(z+k) k!}. \quad (1.154)$$

⁹Ver, por ejemplo, Corolario 1 p. 279 en la referencia [61] o se puede consultar un libro sobre el problema de las funciones separadamente analíticas de Jarnicki y Pflug [33].

1.5.2. La función error y funciones relacionadas

La función error es una función especial que se utiliza principalmente en el análisis de probabilidades, estadísticas y teorías relacionadas con el cálculo de integrales. Por ejemplo, en la teoría de la probabilidades la función error se usa para calcular probabilidades en distribuciones normales. Se usa en la formulación de intervalos de confianza, pruebas de hipótesis, y en la determinación de la probabilidad acumulada de eventos que siguen una distribución normal. En el área de la física, esta función suele expresar soluciones de ecuaciones diferenciales que involucran procesos de difusión y conducción de calor o, incluso, aparece en problemas relacionados con mecánica cuántica. Además de lo anterior, la función error también aparece en áreas de ingeniería como el análisis de señales, el procesamiento de imágenes y la modelación de fenómenos de difusión en medios heterogéneos.

La función error, denotada comúnmente como erf , se define como:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.155)$$

Esta integral no puede resolverse en términos de funciones elementales, pero erf está bien tabulada y se puede calcular numéricamente con bastante precisión. En palabras sencillas, la función error mide el área bajo la curva de la función de Gauss desde $x = 0$ hasta un valor x arbitrario.

En este punto vale la pena mencionar que el nombre “función error” fue propuesto por Glaisher en 1871 en un artículo titulado “On a class of definite integrals” [26]. Glaisher propone el nombre de función error para la integral (1.155) “debido a que su uso más temprano y aún más significativo está vinculado con la teoría de la probabilidad, y en particular con la teoría de los errores” [26]. Es importante destacar que en dicho artículo Glaisher presenta una serie de integrales que se pueden escribir en términos de $\text{erf}(x)$ mostrando que era indispensable tener una notación para la integral definida de la ecuación (1.155) que no se puede escribir en términos de funciones elementales.

Algunas propiedades que se pueden apreciar directamente de la definición son, por ejemplo, que la función error es impar, lo que significa que $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$, o que sus valor en $x = 0$ es cero. $\text{erf}(0) = 0$. Igualmente, es fácil darse cuenta de que la función error, cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$, toma los valores 1 y -1 respectivamente, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1. \quad (1.156)$$

No es difícil darse cuenta de que el desarrollo en serie de potencias para la función error se puede obtener fácilmente al desarrollar la exponencial e integrando término a término

la serie, hasta obtener:

$$\operatorname{erf} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \quad (1.157)$$

Además de la función error básica $\operatorname{erf}(x)$, existen varias funciones que están estrechamente relacionadas con ella y que son útiles en diversos campos, especialmente en la probabilidad y en la resolución de ecuaciones diferenciales.

La función error complemento, denotada comúnmente como erfc , está definida como:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (1.158)$$

Esta función representa la probabilidad de que una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza uno sea mayor que x . La erfc también tiene una relación directa con la distribución normal estándar, ya que la probabilidad acumulada de una variable normal estándar está dada por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (1.159)$$

Esta expresión describe la probabilidad de que una variable aleatoria X distribuida según una normal estándar sea menor o igual a x .

Es importante también mencionar que la función error y la función error complemento están relacionadas con la funciones gamma incompletas (inferior y superior) a través de las siguientes identidades:

$$\operatorname{erf}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \gamma \left(\frac{1}{2}, z^2 \right), \quad (1.160)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma \left(\frac{1}{2}, z^2 \right). \quad (1.161)$$

Otra función que es importante mencionar es la función error imaginaria, denotada por $\operatorname{erfi}(x)$, una función que es real y se define como la función error con argumento imaginario:

$$\operatorname{erfi}(x) := i \operatorname{erf}(ix), \quad (1.162)$$

donde el factor imaginario i se incluye para que $\operatorname{erfi}(x)$ sea una función con imagen real. Esta función es importante ya que muchas veces simplifica la notación de otras funciones que se expresan como la función error con argumento imaginario.

Por último, es importante mencionar brevemente las funciones de Dawson. Estas funciones, denotadas por $D_+(x)$ y $D_-(x)$, son otras funciones especiales relacionadas con $\operatorname{erf}(x)$,

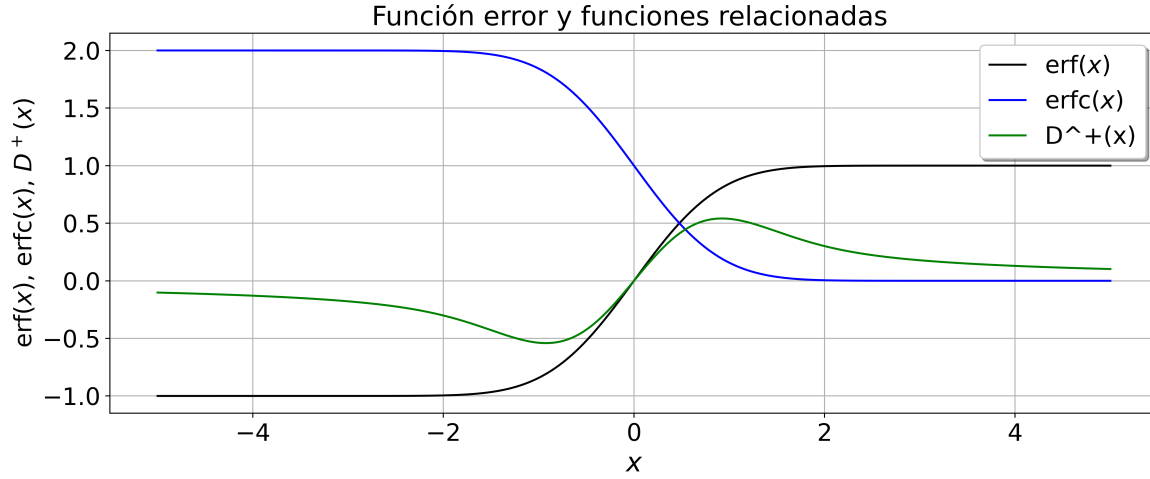


Figura 1.6: Función error y funciones relacionadas. Se muestra la gráfica de la función error (línea negra), la función error complementaria (línea azul) y la función de Dawson D^+ (línea verde).

y se definen como:

$$D_+(x) := e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \quad (1.163)$$

$$D_-(x) := e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.164)$$

La función $D_+(x)$ es también denotada por algunos autores como $D(x)$ o $F(x)$. No es difícil mostrar que la función $D_+(x)$ es la transformada de Fourier

$$D_+(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t^2/4} \sin(xt) dt. \quad (1.165)$$

La función de Dawson $D_+(x)$ puede escribirse directamente en términos de la función error o la función error imaginaria como sigue:

$$D_+(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \text{erfi}(x) = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \text{erf}(ix). \quad (1.166)$$

Y al igual que $D_+(x)$, la función $D_-(x)$ se escribe en términos de la función error como sigue:

$$D_- = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \text{erf}(x). \quad (1.167)$$

En la figura [1.6](#) podemos apreciar las gráficas de las funciones error, error complementaria y la función de Dawson $D^+(x)$ para comparar su comportamiento.

Resumen de definiciones de $\operatorname{erf}(x)$ y funciones relacionadas

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (1.168)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad (1.169)$$

$$\operatorname{erfi}(x) = i \operatorname{erf}(ix), \quad (1.170)$$

$$\operatorname{erf}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \quad (1.171)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \quad (1.172)$$

$$D_+(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \quad (1.173)$$

$$D_-(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (1.174)$$

1.6. Ejercicios

1. Obtén la relación de recurrencia para la función gamma,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.175)$$

a partir de la representación de Γ como límite:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)} n^z. \quad (1.176)$$

2. Muestra que los dobles factoriales se pueden escribir en términos de factoriales ordinarios como:

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad (1.177)$$

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (1.178)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

3. En teoría de probabilidades, la distribución exponencial es una distribución continua que sirve para modelar diferentes fenómenos en la naturaleza, tales como la probabilidad de decaimiento de electrones en un material radiactivo o bien el intervalo de tiempo entre terremotos. La distribución exponencial se define como:

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (1.179)$$

para cualquier real $\lambda > 0$. Haciendo uso de la función gamma, muestra que los *momentos* de la distribución, M_k , definidos como:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad (1.180)$$

para $k \in \mathbb{N}$, están dados por:

$$M_k = \frac{n!}{\lambda^n}. \quad (1.181)$$

4. La *distribución gamma* es una distribución que generaliza la distribución exponencial, y se define como:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad (1.182)$$

siendo α y λ parámetros reales positivos de la distribución. Muestra que los momentos de la distribución gamma (ver ejercicio 3 para la definición de los momentos de una distribución) están dados por:

$$M_k = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}, \quad (1.183)$$

para $k \in \mathbb{N}$.

5. Haciendo uso de la función gamma, muestra que:

$$\int_0^1 x^k \ln(x) dx = -\frac{1}{(k+1)^2}. \quad (1.184)$$

6. Obtén la relación de recurrencia para la función gamma,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.185)$$

a partir de la representación integral de $\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.186)$$

7. Muestra que para toda $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \neq 0$, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{a}. \quad (1.187)$$

8. Evalúa la siguiente integral en términos de la función beta,

$$\int_0^\infty \frac{\sinh^\alpha(x)}{\cosh^\beta(x)} dx. \quad (1.188)$$

9. Evalúa las siguientes integrales en términos de factoriales (tienes que hacer uso de la función beta):

$$(a) \quad \int_{-1}^1 (1+x)^a (1-x)^b dx, \quad (1.189)$$

$$(b) \quad \int_0^1 (1-x^4)^{-1/2} dx, \quad (1.190)$$

$$(c) \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos(x)} dx. \quad (1.191)$$

10. Haciendo uso de la función gamma, muestra que:

$$\int_0^\infty x^{2s+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}, \quad (1.192)$$

donde a y s son variables reales tales que $a > 0$ y $s > -1$ si el factorial se interpreta en términos de la función gamma.

11. Haciendo uso de la función gamma, muestra la siguiente identidad:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u^{1+s}} du = \frac{1}{s} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s). \quad (1.193)$$

12. A partir de la representación para la función digamma,

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^\infty \frac{z}{k(z+k)},$$

muestra que

$$\psi(n+1) = -\gamma + H_n,$$

siendo H_n el n -ésimo número armónico.

13. Muestra que la sucesión $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\gamma_n := \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln(n). \quad (1.194)$$

es convergente.

14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivada continua en el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \\ &+ \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) f(b). \end{aligned} \quad (1.195)$$

(b) Aplica la identidad en (a) a la función $f(x) = x^{-s}$ para $a, b \in \mathbb{N}$. Con la identidad resultante muestra que cuando $a = 1$ y $b \rightarrow \infty$ tenemos que:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)}{x^{1+s}} dx + \frac{1}{2}. \quad (1.196)$$

15. Muestra que la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ puede escribirse como:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (1.197)$$

Sugerencia: toma la serie que define a $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1.198)$$

y sepárala en dos series: una con los n 's que son múltiplos de 2 y otra con los que no son múltiplos de 2. De la primer serie factoriza 2^{-s} y observa que se recupera la serie original (la función zeta de Riemann). Despeja $\zeta(s)$ y déjala en términos de la serie que contiene los n 's que no son múltiplos de 2. Esta serie se debe volver a dividir en dos: una que contiene los n 's que no son múltiplos de 2 pero sí son múltiplos de 3, y otra serie con los n 's que no son múltiplos de 2 ni múltiplos de 3. Repite el procedimiento anterior (factoriza 3^{-s} y despeja $\zeta(s)$), generaliza y prueba por inducción el resultado.

16. Utilizando propiedades de la función gamma demuestra que:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\exp(x) - 1} dx. \quad (1.199)$$

17. En teoría de probabilidades existe una función $f(x)$ que define lo que se conoce como la “distribución beta”. La función $f(x)$, conocida como *densidad de probabilidad*, se define como:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad (1.200)$$

para valores de x tales que $x \in [0, 1]$. Los parámetros de la distribución a y b se asumen reales positivos.

- (a) Muestra que la media de la distribución μ , definida mediante la fórmula,

$$\mu = \int_0^1 x f(x) dx. \quad (1.201)$$

está dada por:

$$\mu = \frac{a}{a+b}. \quad (1.202)$$

- (b) Muestra que la varianza de la distribución beta $\langle(\Delta x)^2\rangle$, la cual se define como,

$$\langle(\Delta x)^2\rangle := \int_0^1 x^2 f(x) dx - \mu^2, \quad (1.203)$$

está dada por,

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \quad (1.204)$$

18. Muestra que

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \left(\frac{1}{4}\right)!. \quad (1.205)$$

19. Demuestra que

$$\int_0^\infty \frac{v^{-z}}{v+1} dv = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.206)$$

Sugerencia: Haz uso de la técnica de variable compleja para integrales impropias y considera el contorno de integración de la figura 1.7.

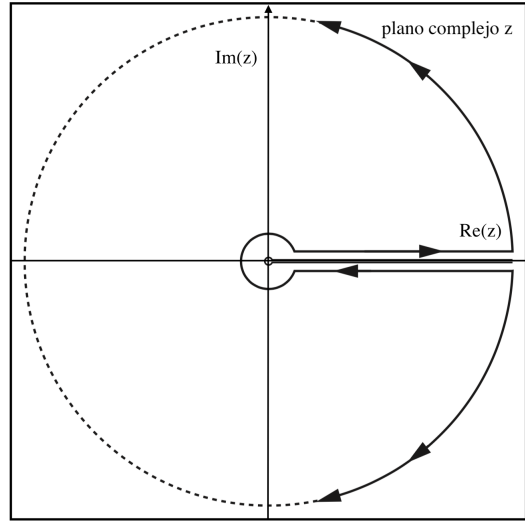


Figura 1.7: Contorno de integración de la integral del ejercicio 19. Para resolver la integral hay que dividir la integral en cuatro partes según el contorno de integración: una integral sobre el círculo “interior”, otra sobre el círculo exterior, y dos más sobre las líneas que corren paralelamente a lo largo del eje x. Hay que tener presente la orientación de contorno para evitar problemas de signos.

20. Demuestra la validez de las siguientes representaciones de la función beta:

$$B(p+1, q+1) = 2 \int_0^1 x^{2p+1} (1-x^2)^q dx, \quad (1.207)$$

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt, \quad (1.208)$$

$$B(p+1, q+1) = \int_0^\infty \frac{u^p}{(1+u)^{p+q+2}} du. \quad (1.209)$$

21. Verifica las siguientes identidades de la función beta:

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} B(a+1, b-1), \quad (1.210)$$

$$B(a, b)B(a+b, c) = B(b, c)B(a, b+c). \quad (1.211)$$

22. Haciendo uso de la función gamma, evalúa las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_0^\infty x^7 e^{-9x^2} dx, \quad (1.212)$$

$$(b) \quad \int_0^1 x^{-4} e^{(1-1/x)} dx, \quad (1.213)$$

$$(c) \quad \int_0^\infty (4t^4 + 3t^3 + 3t - 2)e^{-4t} dt. \quad (1.214)$$

23. Haciendo uso de la función beta, evalúa las siguientes integrales en términos de factoriales:

$$(a) \quad \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{(1-x)^3}}{(1+x)^{4/3}} dx, \quad (1.215)$$

$$(b) \quad \int_0^1 (1-y^4)^{-1/2} dy, \quad (1.216)$$

$$(c) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}(u) du. \quad (1.217)$$

24. (a) Para $n \in \mathbb{N}$ escribe en términos de dobles factoriales y de $\pi^{1/2}$ las siguientes funciones gamma:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right), \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right). \quad (1.218)$$

(b) Usa las identidades anteriores para probar que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \pi. \quad (1.219)$$

25. Muestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!! n^{1/2}}{(2n)!!} = \frac{1}{\pi^{1/2}}. \quad (1.220)$$

26. Muestra que

$$\int_0^\infty x e^{-x} \ln(x) dx = 1 - \gamma, \quad (1.221)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

27. Comprueba la siguiente identidad para $n > 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2} dx = n! \zeta(n), \quad (1.222)$$

donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann.

28. Verifica, explicando paso por paso, que la función poligamma puede desarrollarse en serie de Taylor como sigue:

$$\psi^{(m)}(z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{m+k+1} \frac{(m+k)!}{k!} \zeta(m+k+1) z^k, \quad \text{para } m \geq 1. \quad (1.223)$$

29. Con ayuda de la función gamma, obtén la fórmula de Walis para π , esto es, demuestra que

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \right) \left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \right) \left(\frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \right) \cdots \quad (1.224)$$

Sugerencia: Haz uso de las fórmulas desarrolladas en el ejercicio [24](#).

30. Calcula los residuos de la función gamma, $\Gamma(z)$ en $z = -n$ para cualquier n no negativo.

31. Muestra que

$$\int_0^\infty e^{-ax^b} dx = a^{-1/b} \Gamma\left(1 - \frac{1}{b}\right). \quad (1.225)$$

32. Muestra que cuando la función gamma incompleta superior,

$$\Gamma(s, z) := \int_z^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \quad (1.226)$$

se evalúa en $s = 0$, puede escribirse como:

$$\Gamma(0, z) = -\gamma - \ln(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k(k!)}. \quad (1.227)$$

Sugerencia: usa la expresión para $\Gamma(s, z)$:

$$\Gamma(s, z) = \Gamma(s) - \frac{1}{s} - \left(\gamma(s, z) - \frac{1}{s} \right), \quad (1.228)$$

y toma el límite $s \rightarrow 0$.

33. Usando la relación de recurrencia de la ecuación ([1.146](#)), muestra que:

$$\Gamma(-n, z) = \frac{1}{n!} \left(\frac{e^{-z}}{z^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)! z^k + (-1)^n \Gamma(0, z) \right). \quad (1.229)$$

34. Comprueba las siguientes identidades

$$(a) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{x}), \quad (1.230)$$

$$(b) \quad \gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{x}), \quad (1.231)$$

$$(c) \quad \Gamma(s, x) = x^s E_{1-s}(x). \quad (1.232)$$

En esta última expresión la función es la función integral exponencial generalizada, definida como:

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt. \quad (1.233)$$

35. Muestra que

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[x^{-z} \gamma(z, x) \right] = (-1)^m x^{-z-m} \gamma(z+m, x), \quad (1.234)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[e^x \gamma(z, x) \right] = \frac{e^x \Gamma(z) \gamma(z-m, x)}{\Gamma(z-m)}. \quad (1.235)$$

36. La función error está relacionada con la distribución normal estándar. La función de distribución acumulada, $\Phi(x)$, asociada a una variable aleatoria X con distribución normal estándar está dada por:

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (1.236)$$

- (a) Usando la función error, calcula la probabilidad de que una variable aleatoria X , distribuida según una normal estándar, sea menor que $x = 1$, es decir, calcula $\mathbb{P}(X \leq 1)$
- (b) Calcula la probabilidad de que una variable aleatoria X sea mayor que $x = -2$.
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $[-1, 1]$?

37. La ecuación de difusión unidimensional para un proceso en el que una partícula se desplaza de acuerdo con una ley gaussiana es:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.237)$$

donde $c(x, t)$ es la concentración de partículas, D es el coeficiente de difusión, y x es la posición espacial. La solución a esta ecuación en condiciones iniciales apropiadas está dada por:

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (1.238)$$

Si queremos calcular la fracción de partículas que han llegado a una posición x después de un tiempo t , utilizamos la función error, ya que esta describe el comportamiento de la distribución normal en el contexto de difusión.

- (a) Escribe una expresión para la fracción de partículas $P(x, t)$ que han llegado a una posición x después de un tiempo t usando la función error.
- (b) Para $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ y $t = 1 \text{ s}$, calcula la fracción de partículas que han llegado a $x = 2 \text{ cm}$.
38. La función error para valores pequeños de x puede ser aproximada mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = 0$:

$$\text{erf}(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots \right). \quad (1.239)$$

- (a) Usa el desarrollo en serie para aproximar $\text{erf}(0.1)$ usando los primeros tres términos de la serie.
- (b) Calcula el valor exacto de $\text{erf}(0.1)$ y compara el resultado con la aproximación obtenida. ¿Qué tan buena es la aproximación para $x = 0.1$?
39. La ecuación de conducción de calor en una barra unidimensional es:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.240)$$

donde $T(x, t)$ es la temperatura, α es la difusividad térmica, y x es la posición en la barra. Para condiciones iniciales de tipo gaussiano (es decir, $T(x, 0) = \exp(-x^2)$), la solución de esta ecuación es:

$$T(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\alpha t}} dx'. \quad (1.241)$$

La integral de la solución tiene la forma de la función error. Esto puede expresarse como:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right]. \quad (1.242)$$

- (a) Para $\alpha = 1 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ y $t = 2 \text{ s}$, calcula la temperatura en el punto $x = 3 \text{ cm}$.
- (b) ¿Qué sucede con la temperatura en el límite de $t \rightarrow \infty$?

Capítulo 2

Ecuaciones en derivadas parciales

2.1. Clasificación de la ecuaciones en derivadas parciales

Galileo Galilei solía decir que el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas. Así, la física, como la naturaleza en general, se puede describir en términos de ecuaciones, y gran parte de esas ecuaciones son aquellas que denominamos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son ecuaciones que involucran funciones (reales, complejas o aun vectoriales) en varias variables así como sus derivadas parciales. Y al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias, estas también las podemos clasificar de varias maneras. Clasificar este tipo de ecuaciones es importante por varias razones. Por ejemplo, las ecuaciones algebraicas las podemos catalogar haciendo con base en la potencia más grande de la variable desconocida, lo cual nos ayuda a sistematizar la forma de resolverlas. O, nos permite saber si podemos resolverlas de manera exacta o, simplemente, si se pueden resolver o no. En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sabemos que existen dos grandes grupos de ecuaciones: lineales y no lineales. Las ecuaciones lineales, a su vez, se pueden clasificar de diversas maneras: según si tienen un término que no depende de la función desconocida se pueden llamar ecuaciones homogéneas o no homogéneas; con base en la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, se puede llamar de primer, segundo, tercer orden, etc, o incluso si sus coeficientes son constantes o no son parte de una clase específica. Toda esa información nos ayuda a saber qué técnica usar si la ecuación se encuentra en una u otra categoría. Asimismo, sucede con las ecuaciones en derivadas parciales.

2.1.1. Una clasificación de ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales pueden, al igual que las ordinarias, clasificarse de diferentes maneras. Una de estas clasificaciones implica el mayor orden de las derivadas que aparecen en la ecuación, y así, al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias, las hay de primer orden, de segundo orden, etc. La mayor parte de las clasificaciones que se tienen para las ecuaciones diferenciales ordinarias se extienden automáticamente al caso de las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, existe una clasificación, dentro de la clase de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden, que no tienen contraparte en las ecuaciones ordinarias.

Solamente se considerarán ecuaciones de segundo orden, las cuales clasificaremos en tres grandes grupos a continuación. El hecho de solo tomar en cuenta ecuaciones de segundo orden tiene que ver con que estas componen gran parte de las ecuaciones de la física. Por ejemplo, en la teoría electromagnética, la ecuación que describe la propagación de la luz, la ecuación de onda, es una ecuación de segundo orden. La ecuación de onda aparece también en la dinámica de fluidos al describir la propagación de las ondas sonoras. Dentro de la termodinámica, la ecuación de difusión es, también, de segundo orden, así como lo es la ecuación de Schrödinger, que describe la mecánica cuántica de las partículas a escalas nanoscópicas.

Existen tres grandes grupos de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden: las ecuaciones hiperbólicas, las ecuaciones elípticas, y las ecuaciones parabólicas.

Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real en $\mathbb{R}^2$. Se dice que una ecuación diferencial parcial para ψ es de tipo hiperbólico si es de la forma de (o puede ser transformada en) la siguiente ecuación

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1)$$

Por otro lado, decimos que una ecuación diferencial parcial para ψ es de tipo elíptico si es de la forma de (o puede ser transformada en) la siguiente ecuación

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.2)$$

Y, finalmente, una ecuación diferencial parcial para ψ es de tipo parabólico si es de la forma de (o puede ser transformada en) la siguiente ecuación

$$a \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (2.3)$$

Cuando tenemos ecuaciones en derivadas parciales que involucran más de dos variables, esta clasificación se extiende directamente. A continuación daremos algunos ejemplos de estas situaciones.

Ejemplo 2.1.1. Algunas ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en la física son las siguientes.

- Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.4)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, de tipo elíptico, además de ser una ecuación homogénea

Esta ecuación ocurre frecuentemente en la teoría electromagnética, incluyendo la electrostática y la magnetostática. También aparece frecuentemente en el estudio de la hidrodinámica, la conducción del calor e incluso en la gravitación.

- Ecuación de Poisson.

$$\nabla^2 \psi = \rho \quad (2.5)$$

Esta es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden no homogénea, de tipo elíptico

Esta ecuación es la que describe el campo electrostático de una fuente de cargas ρ .

- Ecuación de onda.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

En este caso, esta es una ecuación de tipo lineal de segundo orden homogénea, de tipo hiperbólico.

Esta ecuación aparece en varias áreas de la física. Entre otros fenómenos, esta ecuación describe la propagación de ondas sonoras u ondas electromagnéticas.

- Ecuación de difusión.

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Es una ecuación de tipo lineal de segundo orden homogénea, de tipo parabólico.

Como su nombre lo indica, esta ecuación describe el transporte difusivo del calor o la difusión de partículas en un medio homogéneo, entre otros fenómenos.

En general, podemos saber si una ecuación diferencial parcial pertenece a uno u otro grupo (hiperbólica, elíptica o parabólica) a través de un discriminante, de manera completamente análoga a como se clasifican las cónicas.

La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden más general para una función desconocida $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de la forma:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + F(x, y) \psi(x, y) = 0.$$

En este caso, las ecuaciones de tipo hiperbólico son aquellas que satisfacen la condición:

$$B^2 - 4AC > 0. \quad (2.8)$$

La ecuaciones de tipo elíptico son aquellas cuyo discriminante cumple la condición:

$$B^2 - 4AC < 0. \quad (2.9)$$

Y, finalmente, se dice que una ecuación es de tipo parabólico si:

$$B^2 - 4AC = 0. \quad (2.10)$$

El discriminante $B^2 - 4AC$ normalmente depende de las variables x y y , por lo que la ecuación puede cambiar de un tipo a otro a lo largo del dominio de integración, aunque esto es poco común. Los calificativos parabólico, hiperbólico y elíptico proceden de la analogía, como se mencionó arriba, con la clasificación de las ecuaciones cuadráticas o secciones cónicas, pues la ecuación algebraica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.11)$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica si su discriminante $B^2 - 4AC$ es, respectivamente, positivo, cero o negativo.

En este punto es importante establecer una generalización de las ecuaciones en derivadas parciales con más de dos variables. Antes de esto, es necesario notar que la clasificación descrita arriba se puede relacionar con los valores propios de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

No es difícil notar que los valores propios de $\mathbf{A}$ están dados por:

$$2\lambda_{\pm} = A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4AC + B^2}. \quad (2.13)$$

Ahora, cuando la ecuación en derivadas parciales correspondiente es de tipo hiperbólico, tenemos que $B^2 - 4AC > 0$. Esto quiere decir que uno de los valores propios es positivo

mientras que otro es negativo. Por ejemplo, si $A + C > 0$ tenemos el caso en que $\lambda_+ > 0$ y $\lambda_- < 0$, papeles que se invierten en el caso en $A + C < 0$. Cuando la ecuación en derivadas parciales se encuentra en la familia de las ecuaciones elípticas, tenemos la situación en que $B^2 - 4AC < 0$, lo cual nos conduce a la situación en que ambos valores propios, λ_+ y λ_- , son ambos positivos o ambos negativos. Por último, si la ecuación correspondiente es de tipo parabólico, se tiene que $B^2 - 4AC = 0$, lo que nos conduce a que uno de los valores propios es cero. Esta forma de replantear la clasificación nos permite extenderla directamente al caso en que tenemos más de dos variables independientes.

Si tenemos n variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden de la forma más general puede escribirse como [13]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_{i,j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + c\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) + d = 0. \quad (2.14)$$

La clasificación depende de los valores propios de la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = (a_{i,j})$:

- Elíptica: cuando los valores propios son todos positivos o todos negativos.
- Parabólica: cuando los valores propios son todos positivos o todos negativos, excepto uno, el cual toma el valor cero.
- Hiperbólica: cuando solo hay un valor propio negativo y todos los demás son positivos, o cuando solo hay un valor propio positivo y todos los demás son negativos.
- Ultrahiperbólica: cuando hay más de un valor propio positivo y más de un valor propio negativo, y no hay valores propios iguales a cero.

2.1.2. Condiciones de frontera

Cuando nos enfrentamos al problema de obtener una solución de una ecuación diferencial parcial, es necesario imponer ciertas condiciones. Algunas de estas condiciones se manifiestan naturalmente en un problema físico específico y comúnmente deseamos obtener una solución única. Por ejemplo, sabemos que, al resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, obtenemos una cantidad infinita de soluciones que se manifiestan a través de constantes de integración. Si esa ecuación es, por ejemplo, la ecuación de movimiento de un objeto puntual como el tiro parabólico, sabemos que la trayectoria física del móvil debe ser única. Y dicha unicidad se obtiene imponiendo lo que conocemos como condiciones iniciales: si damos la posición inicial del móvil y su velocidad inicial, podremos

conocer su trayectoria (única), la cual se corresponde con la solución de la ecuación de movimiento en cuestión. Es decir, las condiciones iniciales nos proveen de la unicidad que buscamos.

En el caso de las ecuaciones en derivadas parciales la situación se complica un poco más, pero aún hay cierta similitud. Hay problemas físicos cuyas ecuaciones (en derivadas parciales) no involucran el tiempo. Otras sí que lo incluyen. Cuando la variable temporal es explícita en nuestro problema, podemos pensar que, en analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias, debemos imponer condiciones iniciales, y de hecho, es así en una buena cantidad de problemas clásicos de la física. No obstante, la presencia de las otras variables (las variables espaciales) nos dan grados de libertad adicional, lo que resulta en constantes de integración adicionales, esto podría implicar la no unicidad de la solución que buscamos. Este problema se evita con la imposición de condiciones adicionales a las que, en lo sucesivo, nos referiremos como *condiciones de frontera*. Estas son, básicamente, condiciones sobre la función que debe satisfacer en la frontera de cierto dominio, el espacio físico, en el que buscamos la solución a nuestro problema.

Antes de pasar a la descripción de los principales tipos de condiciones de frontera que se suelen imponer en problemas físicos, estableceremos, a continuación, algunas soluciones a ecuaciones en derivadas parciales:

Ejemplo 2.1.2. Algunas soluciones de ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en la física.

- Ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace en 3D, es decir, la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.15)$$

tiene como solución:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (2.16)$$

siendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$, c una constante de integración arbitraria y $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. La solución mencionada es válida para cualquier $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$. Normalmente se usa la constante $c = 1/4\pi$.

- Ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson en 3D,

$$\nabla^2 \psi = \rho(\mathbf{r}), \quad (2.17)$$

tiene como solución formal la integral:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.18)$$

siendo c una constante de integración. La solución es válida para $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

- Ecuación de onda. La ecuación de onda en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.19)$$

tiene como solución más general:

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.20)$$

siendo $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cualquiera funciones doblemente diferenciable. Esta solución se puede generalizar a cualquier dimensión.

- Ecuación de difusión. La ecuación de difusión unidimensional

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.21)$$

tiene como solución:

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x') \frac{e^{-(x-x')^2/4at}}{\sqrt{4\pi at}} dx', \quad (2.22)$$

siendo $\rho_0(x)$ una función integrable arbitraria. Al igual que en el caso anterior, esta solución se puede generalizar a más dimensiones.

Podemos darnos cuenta de que una ecuación en derivadas parciales puede tener infinitas soluciones linealmente independientes, una propiedad que la distingue de las ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y homogéneas tenemos, a lo sumo, tantas soluciones linealmente independientes como el orden de la ecuación. En el caso que nos ocupa, tendremos que puede haber infinitas funciones linealmente independientes. Entonces, para que una solución $\psi(x, y)$ sea única, se debe satisfacer una cierta relación (condición) sobre una curva en el plano (x, y) que actúa como una frontera que separa la región de integración, dentro de la cual queremos conocer la solución $\psi(x, y)$, del resto del plano (x, y) .

Comúnmente se establecen cuatro tipos de condiciones de contorno:

1. Condiciones de contorno de Dirichlet. Son aquellas en las que $\psi(x, y)$ se especifica en cada punto del contorno o frontera.

2. Condiciones de frontera de Neumann. Se especifica en cada punto del contorno la componente normal a la frontera del gradiente de ψ , es decir, $\nabla_n \psi$.
3. Condiciones de frontera de Cauchy. Se especifica en cada punto del contorno tanto ψ como $\nabla_n \psi$. Este es el tipo de condición que se suele especificar en ecuaciones diferenciales ordinarias, conocidas también como condiciones iniciales, en donde el valor de la función y la derivada se especifican para obtener una única solución.
4. Condiciones de frontera mixtas. En un tramo de la frontera se especifica el valor de ψ y en el tramo complementario se especifica el valor de $\nabla_n \psi$.

En analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, podría pensarse que las condiciones de contorno adecuadas para las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden son las de Cauchy. Pero esto no es siempre cierto, incluso con estas condiciones, el problema podría estar sobredeterminado. Es decir, podría ser que las condiciones de Cauchy nos imponga condiciones de más (imposibles de satisfacer) para la solución buscada. De hecho, las condiciones de frontera apropiadas, es decir, aquellas que garantizan la existencia y unicidad de las soluciones, son diferentes según la ecuación diferencial parcial ya sea hiperbólica, parabólica o elíptica. Cuando establezcamos los métodos de solución, vamos a establecer con más precisión qué clase de condiciones de contorno para cada ecuación nos proporciona una solución única.

2.1.3. Métodos de solución

A continuación, vamos a dar un panorama de algunas técnicas comunes de solución de ecuaciones diferenciales parciales, y en algunos casos estableceremos un ejemplo sencillo de esta situación.

Ya sabemos que, en el caso de las ecuaciones ordinarias, existen técnicas basadas en transformaciones integrales, siendo la transformada de Fourier, tal vez, el epítome de estas técnicas. En el caso de ecuaciones en derivadas parciales, tenemos tres grandes grupos de técnicas de solución:

1. Solución por transformadas integrales.
2. Solución por medio de funciones de Green (comúnmente denominados *propagadores*).
3. Solución por medio de la técnica de separación de variables.

Las dos primeras metodologías en realidad también se aplican en ecuaciones diferenciales ordinarias; en particular, la técnica de funciones de Green se estudiará en capítulos posteriores. La técnica de separación de variables, por su parte, es una de las más populares para resolver ecuaciones en derivadas parciales que provienen de la física. Esa es la técnica que abordaremos para desarrollar varias familias de funciones especiales. Pero antes de proceder a implementar esta técnica, se hace necesario introducir la teoría de Sturm-Liouville, que nos permite establecer soluciones de ecuaciones en derivadas parciales en completa analogía con el álgebra vectorial.

2.2. Teoría de Sturm-Liouville

A continuación, vamos a revisar la teoría de Sturm-Liouville. De manera general, podemos decir que esta teoría establece que un operador diferencial lineal de segundo orden que tiene la forma *autoconjugada* posee una colección de valores propios que son reales, cuyos vectores propios asociados poseen la propiedad de ortogonalidad. Es decir, los operadores con la forma autoconjugada son el análogo de las matrices *hermitianas* ¹ cuyos valores propios son reales y sus vectores propios son ortogonales.

2.2.1. Operadores conjugados

Hay que recordar que una técnica general para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, de primer orden, lineales y no homogéneas, se basa en hallar lo que se conoce como *factor integrante* [30]. Esta técnica consiste, esencialmente, en multiplicar la ecuación correspondiente por una función (el factor integrante) que convierte la parte homogénea de la ecuación en una derivada total. Esto es, el factor integrante se encarga de convertir la ecuación en una ecuación diferencial exacta. Una pregunta que surge inmediatamente de esta observación es si podemos emplear la técnica del factor integrante para hacer exacta una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden lineal y homogénea. Exploreemos esta línea de razonamiento.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y homogénea,

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y(x) = 0. \quad (2.23)$$

Vamos a suponer que esta ecuación diferencial puede volverse exacta si multiplicamos por un factor adecuado, al que denotaremos por $\mu(x)$. Esto es, la ecuación diferencial de la

¹Algunos autores usan el término *hermíticas* para referirse a este tipo de matrices. En este libro usaré ambos términos de manera equivalente.

forma

$$\mu(x)p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \mu(x)p_1(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p_0(x)y(x) = 0, \quad (2.24)$$

debe poder escribirse como

$$\frac{d}{dx} \left[A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y(x) \right] = 0. \quad (2.25)$$

Nuestro objetivo, a continuación, es obtener las funciones $A(x)$ y $B(x)$, así como el factor integrante $\mu(x)$ en términos de las funciones dadas $p_2(x)$, $p_1(x)$, y $p_0(x)$. Para esto vamos a desarrollar la derivada en la ecuación (2.25) con la finalidad de compararla con la ecuación (2.24). De este modo tenemos que

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + A'(x)\frac{dy}{dx} + B(x)\frac{dy}{dx} + B'(x)y(x) = 0, \quad (2.26)$$

en donde hemos utilizado la notación de “prima” para denotar la derivada de las funciones A y B . Notemos que esta última expresión puede reescribirse como

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + (A'(x) + B(x))\frac{dy}{dx} + B'(x)y(x) = 0. \quad (2.27)$$

Si comparamos esta última expresión con la ecuación (2.24) podemos darnos cuenta de que

$$A(x) = \mu(x)p_2(x), \quad (2.28)$$

$$A'(x) + B(x) = \mu(x)p_1(x), \quad (2.29)$$

$$B'(x) = \mu(x)p_0(x). \quad (2.30)$$

Podemos apreciar que estas ecuaciones constituyen un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden lineales para las funciones desconocidas A , B y μ . Nuestro objetivo ahora no es resolver dicho sistema, sino obtener una sola ecuación para una de estas funciones desconocidas: el factor integrante $\mu(x)$. De hecho, no es difícil ver que

$$A'(x) = \frac{d}{dx} \left(\mu(x)p_2(x) \right), \quad (2.31)$$

y por lo tanto,

$$\frac{d}{dx} \left(\mu(x)p_2(x) \right) + B(x) = \mu(x)p_1(x). \quad (2.32)$$

Derivando esta última igualdad obtenemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\mu(x)p_2(x) \right) + B'(x) = \frac{d}{dx} \left(\mu(x)p_1(x) \right), \quad (2.33)$$

y usando la identidad (2.30) en esta última expresión obtenemos

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\mu(x)p_2(x) \right) + \mu(x)p_0(x) = \frac{d}{dx} \left(\mu(x)p_1(x) \right). \quad (2.34)$$

Reacomodando los factores y términos en esta última ecuación podemos ver que

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p_2(x)\mu(x) \right) - \frac{d}{dx} \left(p_1(x)\mu(x) \right) + p_0(x)\mu(x) = 0. \quad (2.35)$$

Podemos apreciar inmediatamente que esta última igualdad constituye una ecuación diferencial para $\mu(x)$, el factor integrante de nuestra EDO de segundo orden. A esta ecuación nos referiremos como la *conjugada* (o ecuación *adjunta*) a la ecuación para y , la expresión (2.23). También podemos ver que, de cierta forma, no se gana mucho con esto: la ecuación que hay que resolver para hallar el factor que hace exacta la EDO (2.23) es igual de difícil (o aun más) que la ecuación original que buscamos resolver.

Aunque en este punto parece infructuosa la búsqueda de un “factor integrante” para una EDO de segundo orden, hemos encontrado algo interesante: la ecuación diferencial obtenida para μ tiene una forma muy similar a la ecuación original. De hecho, pareciera que la ecuación (2.35) se hubiera obtenido por hacer que las derivadas parciales operan a la izquierda en la ecuación (2.24) (después de haber “eliminado” $y(x)$ y haber cambiado un signo). Esta peculiar forma de la ecuación para μ de hecho amerita un nombre especial.

Recordemos que las funciones pueden ser interpretadas como vectores de un espacio vectorial abstracto y, en particular, de un espacio vectorial normado con producto interno conocido como el *espacio de Hilbert*. Así como las funciones se pueden pensar como vectores, también las operaciones (lineales) que afectan las funciones son interpretadas como operadores. En el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es común representarlas como un problema lineal, en el sentido de que se busca una función que al ser procesada por un operador diferencial, se obtenga un resultado específico. De esta manera, si definimos el operador diferencial $\mathbf{L}$ como

$$\mathbf{L} := p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(\cdot \right) + p_1(x) \frac{d}{dx} \left(\cdot \right) + p_0(x) \cdot, \quad (2.36)$$

entonces, la ecuación diferencial (2.23) puede escribirse de manera condensada simplemente como

$$\mathbf{L}y = 0. \quad (2.37)$$

De igual manera, podemos definir un nuevo operador, al que llamaremos *operador conjugado a $\mathbf{L}$* , u operador *adjunto* (en concordancia con la nomenclatura para la correspondiente

ecuación) y que denotaremos por $\mathbf{L}^\dagger$, explícitamente dado por,

$$\mathbf{L}^\dagger := \frac{d^2}{dx^2} \left(p_2(x) \cdot \right) - \frac{d}{dx} \left(p_1(x) \cdot \right) + p_0(x) \cdot . \quad (2.38)$$

Vamos a hacer ahora una observación interesante. Supongamos por un momento que la ecuación que hemos descrito para μ es más fácil de resolver que la ecuación para y dada por (2.23). Si fuese así, valdría la pena preguntarse si el factor integrante de la ecuación adjunta (la ecuación adjunta de la ecuación adjunta a $y(x)$) es aún más fácil de resolver. Los cálculos se pueden elaborar de manera directa aplicando la misma técnica que ya hemos establecido. De hecho, no es difícil mostrar que, si denotamos por ν el factor integrante de la ecuación adjunta, entonces la ecuación que satisface ν (la ecuación adjunta de la ecuación adjunta a $y(x)$) está dada por,

$$p_2(x) \frac{d^2 \nu}{dx^2} + p_1(x) \frac{d\nu}{dx} + p_0(x) \nu(x) = 0. \quad (2.39)$$

Esto significa que la ecuación conjugada de la ecuación conjugada es la ecuación original. Es decir, si tratamos de hacer exacta la ecuación para el factor integrante, el que nos vuelve exacta la ecuación original, entonces, regresamos al punto de partida. Al parecer, no hay manera de simplificar el problema de una EDO de segundo orden a través de factores integrantes.

Ya hemos dejado claro que tratar de volver exacta la EDO general (2.23) mediante un factor integrante es un problema igual de complicado de resolver que la ecuación original. No obstante, podríamos preguntarnos si hay una forma especial de la ecuación diferencial en la que hallar el factor integrante sea *exactamente igual* de complicado (o más sencillo) que en el problema original. Buscamos las condiciones para que la ecuación adjunta (la ecuación autoconjugada) sea exactamente igual a la ecuación original, es decir, buscamos las condiciones (sobre p_2 , p_1 y p_0) para que las ecuaciones

$$p_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x) y(x) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p_2(x) \mu(x) \right) - \frac{d}{dx} \left(p_1(x) \mu(x) \right) + p_0(x) \mu(x) = 0, \quad (2.41)$$

sean idénticas.

Si desarrollamos las derivadas en esta última ecuación podemos ver que

$$p_2(x) \mu''(x) + 2p_2'(x) \mu'(x) + p_2''(x) \mu(x) - p_1(x) \mu'(x) - p_1'(x) \mu(x) + p_0(x) \mu(x) = 0,$$

y reduciendo términos semejante, obtenemos

$$p_2(x) \mu''(x) + (2p_2'(x) - p_1(x)) \mu'(x) + (p_2''(x) - p_1'(x) + p_0(x)) \mu(x) = 0. \quad (2.42)$$

Ahora, para que la ecuación (2.42) coincida con la ecuación (2.40), hay que hacer que el coeficiente de y'' coincida con el de μ'' , el de y' con el de μ' y, finalmente, el coeficiente de y con el coeficiente de μ . Haciendo esto obtenemos las siguientes condiciones:

$$2p_2'(x) - p_1(x) = p_1(x), \quad (2.43)$$

$$p_2''(x) - p_1'(x) + p_0(x) = p_0. \quad (2.44)$$

Cabe mencionar que son solamente dos condiciones, ya que el coeficiente para y'' es el mismo que el de μ'' . Debemos notar que si solo pedimos que la función $p_1(x)$ sea igual a $p_2'(x)$, las ecuaciones (2.43) y (2.44) se satisfacen automáticamente. Entonces, la condición para que la ecuación adjunta (2.41) coincida con la ecuación original (2.40) es simplemente

$$p_1(x) = p_2'(x). \quad (2.45)$$

Aún más: si renombramos la función $p_2(x)$ como $p(x)$ y $p_0(x)$ como $q(x)$, entonces, la ecuación (2.40) toma la forma

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p'(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = 0, \quad (2.46)$$

o bien,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = 0, \quad (2.47)$$

ecuación que llamaremos *autoconjugada*, por la simple razón de que la ecuación conjugada (la ecuación para su factor integrante) es exactamente la misma, es decir,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\mu}{dx} \right) + q(x)\mu(x) = 0. \quad (2.48)$$

En términos de operadores, decimos que un operador diferencial $\mathbf{L}$ de segundo orden lineal tiene la forma *autoconjugada* si,

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \cdot \right) + q(x) \cdot, \quad (2.49)$$

lo que significa que la operación de conjugación deja invariante a $\mathbf{L}$, es decir, $\mathbf{L}^\dagger = \mathbf{L}$.

Vamos a hacer ahora una observación más. Sean u y v dos funciones reales y consideremos un operador diferencial $\mathbf{L}$ en su forma general (no en la forma autoconjugada) y consideremos, igualmente, su conjugado $\mathbf{L}^\dagger$. Entonces, tenemos que la diferencia $v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v$ puede escribirse como

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v = v \left(p_2 u'' + p_1 u' + p_0 u \right) - u \left((p_2 v)'' - (p_1 v)' + p_0 v \right). \quad (2.50)$$

Es claro que algunos términos de la ecuación anterior se cancelan inmediatamente, lo que nos da

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v = vp_2u'' + vp_1u' - u(p_2v)'' + u(p_1v)'. \quad (2.51)$$

En esta última ecuación podemos ver que el segundo y cuarto términos del lado derecho de la igualdad completan una derivada total, de manera que

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v = vp_2u'' - u(p_2v)'' + \frac{d}{dx} \left(up_1v \right). \quad (2.52)$$

Los términos restantes (ahora el primero y segundo términos de la ecuación anterior) también pueden escribirse en términos de derivadas totales,

$$\begin{aligned} v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v &= vp_2u'' + (vp_2)'u' - (vp_2)'u' - u(p_2v)'' + \frac{d}{dx} \left(up_1v \right). \\ &= \frac{d}{dx} \left(p_2vu' \right) - \frac{d}{dx} \left(u(vp_2)' \right) + \frac{d}{dx} \left(up_1v \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Esto último quiere decir que la combinación $v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v$ es en realidad una diferencial exacta,

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v = \frac{d}{dx} \left(p_2vu' - u(vp_2)' + up_1v \right), \quad (2.54)$$

de modo que, al integrarla en un intervalo arbitrario, el resultado solo depende de las funciones p_1 , p_2 , u y v evaluadas en los extremos,

$$\int_a^b (v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^\dagger v) dx = \left[p_2vu' - u(vp_2)' + up_1v \right]_a^b. \quad (2.55)$$

Esta última igualdad es conocida como la *identidad de Lagrange*. Este resultado nos será de utilidad más adelante para desarrollar la teoría de Sturm-Liouville.

2.2.2. El problema Sturm-Liouville

Hasta ahora hemos analizado la EDO lineal de segundo orden más general posible sin avanzar, de cierto modo, hacía un método de solución, ni siquiera cuando la ecuación toma una forma “simplificada” es decir, la forma autoconjugada. Sin embargo, veremos que en realidad hemos dado unos cuantos pasos en la dirección correcta. Y para seguir en dicha dirección vamos a proponer un problema con el que parece que nos desviaremos un poco del camino: *el problema Sturm-Liouville*.

Es claro que los operadores diferenciales son transformaciones lineales que operan en un espacio vectorial complejo que consiste de conjunto de funciones cuadrado-integrables [29], es decir, el espacio de Hilbert. En este sentido, es completamente natural preguntarse por las propiedades espectrales de dicho operador, esto es, por la colección de valores propios y *funciones propias* de dicho operador. Aunque esto puede parecer algo ocioso, no lo es: bajo ciertas condiciones los vectores propios de una transformación lineal, que opera sobre un espacio vectorial completo, forman una base. Esto quiere decir, simplemente, que cualquier vector (en nuestro caso, función) puede expresarse como una combinación lineal de los vectores propios (funciones propias) del operador en cuestión.

Dejando esto claro, vamos a proceder a establecer entonces el problema de valores y funciones propias de un operador con la forma autoconjugada. Aunque podríamos preguntarnos por el problema correspondiente de un operador lineal de segundo orden arbitrario, más adelante veremos que esta consideración no solo nos proporciona propiedades especiales del conjunto de funciones propias, sino que cualquier operador lineal de segundo orden puede llevarse siempre a la forma autoconjugada.

Entonces, el problema Sturm-Liouville consiste en hallar los valores propios y funciones propias de un operador diferencial lineal autoconjugado, esto es, buscamos los valores λ y las funciones asociadas $u_\lambda(x)$ que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{L}u_\lambda = \lambda w(x)u_\lambda(x), \quad (2.56)$$

o bien, de manera explícita,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du_\lambda}{dx} \right) + q(x)u_\lambda(x) = \lambda w(x)u_\lambda(x), \quad (2.57)$$

donde $w(x)$ es una función real dada.

Hasta este momento, hemos introducido la propiedad de conjugación de los operadores diferenciales a través de su relación con el factor integrante de una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden. Sin embargo, el nombre de dicha propiedad (la conjugación) es, con todo propósito, el mismo nombre que usamos para referirnos a los “compañeros” de los número complejos, los complejo-conjugados. En realidad podemos definir la propiedad de conjugación de operadores si recurrimos al álgebra lineal abstracta. Ya hemos seguido esta línea desde hace rato, cuando introdujimos la noción de operador diferencial. A continuación, vamos a establecer las bases para obtener un par de resultados sobre el problema Sturm-Liouville.

Antes de definir la operación de conjugación de operadores diferenciales dentro de la teoría de operadores lineales abstractos, primero, tenemos que establecer el espacio donde actúan [29]. Vamos a denotar por $\mathcal{L}^2(a, b)$ el conjunto que contiene todas las funciones

cuadrado-integrables ² que van de $\mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Sabemos que este espacio forma un espacio vectorial normado, en el que la norma es inducida por un producto interno (la norma L^2 o euclidiana), el cual se define generalmente como sigue, si $f, g \in \mathcal{L}^2(a, b)$, entonces, el producto interno de f con g está dado por

$$\langle f|g \rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)dx. \quad (2.58)$$

Se sabe que el espacio vectorial complejo $\mathcal{L}^2(a, b)$ dotado con dicho producto interno y de la correspondiente norma inducida ³ forma un espacio de Banach y, en particular, un espacio de Hilbert, el cual suele interpretarse como una generalización de los espacios euclidianos.

Dentro de este marco teórico, podemos ahora establecer con toda propiedad la acción de conjugación de operadores. Si $\mathbf{L}$ es un operador lineal actuando sobre un espacio vectorial complejo $\mathcal{V}$ normado y con producto interno, entonces, decimos que el operador conjugado a $\mathbf{L}$, denotado por $\mathbf{L}^\dagger$, es un operador tal que,

$$\langle a|\mathbf{L}|b \rangle^* = \langle b|\mathbf{L}^\dagger|a \rangle, \quad (2.59)$$

para cualesquiera $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{V}$. En este sentido, decimos que un operador es *autoconjugado* o *hermítico* si $\mathbf{L} = \mathbf{L}^\dagger$. En vista de lo anterior, también podemos decir, alternativamente, que un operador $\mathbf{L}$ será autoconjugado si, al interior del producto interno $\langle a|\mathbf{L}|b \rangle$, el operador $\mathbf{L}$ actúa indistintamente a la izquierda o a la derecha, esto es:

$$\langle a|\mathbf{L}|b \rangle = \langle a|\mathbf{L}b \rangle = \langle \mathbf{L}a|b \rangle. \quad (2.60)$$

No es difícil probar que un operador diferencial lineal con la forma autoconjugada (o la forma Sturm-Liouville) es un operador conjugado en el sentido (2.59), con algunas precisiones adicionales. En particular, para el problema Sturm-Liouville (y para las aplicaciones que veremos más adelante), vamos a definir el producto interno entre dos funciones de manera diferente.

Sean f, g dos funciones cuadrado-integrables en $[a, b]$, con $b > a \in \mathbb{R}$, entonces, el producto interno entre f y g se define como

$$\langle f|g \rangle := \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx, \quad (2.61)$$

donde $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función real positiva llamada *función de peso*.

²Decimos que una función f es cuadrado-integrable si $\int_a^b |f|^2 dx$ existe. Nótese que como la imagen de f está $\mathbb{C}$, entonces, $|f| = f^* f$.

³Una vez definido un producto interno en un espacio vectorial, la norma inducida es $\|f\|^2 := \langle f|f \rangle$.

Lo que sigue a continuación es probar que dos funciones propias de un operador con la forma Sturm-Liouville, asociadas a valores propios diferentes, son ortogonales. Para eso, vamos a hacer uso de la identidad de Lagrange que establecimos anteriormente.

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones que resuelven el problema Sturm-Liouville asociadas a valores propios distintos, λ, λ' respectivamente, es decir, tales que

$$\mathbf{L}u = \lambda w(x)u(x), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{L}v = \lambda' w(x)v(x), \quad (2.63)$$

siendo $\mathbf{L}$ el operador dado por

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \cdot \right) + q(x) \cdot \cdot \quad (2.64)$$

Siguiendo los mismos pasos que se desarrollaron para probar la identidad de Lagrange (cf. Ec. (2.55)) podemos obtener una identidad equivalente para los operadores autoconjugados, esto es,

$$\int_a^b (v^* \mathbf{L}u - u \mathbf{L}^\dagger v^*) dx = \left[p(v^* u' - (v^*)' u) \right]_a^b. \quad (2.65)$$

En este punto, ya podemos apreciar para dónde vamos. Como $\mathbf{L}$ es autoconjugado, es claro que $\mathbf{L}^\dagger = \mathbf{L}$. Como, además, las funciones u y v satisfacen la ecuación de valores propios, es claro que

$$\mathbf{L}u = \lambda wu, \quad \text{y} \quad \mathbf{L}v^* = \lambda' wv^*. \quad (2.66)$$

(Nótese que la función de peso $w(x)$ no se conjuga, debido a que hemos supuesto que es real). Con todo esto, podemos ver que

$$\int_a^b (v^* \mathbf{L}u - u \mathbf{L}^\dagger v^*) dx = (\lambda - \lambda') \int_a^b w(x) v^* u dx = (\lambda - \lambda') \langle v | u \rangle. \quad (2.67)$$

Este último resultado combinado con la ecuación (2.65) nos muestra que

$$(\lambda - \lambda') \langle v | u \rangle = \left[p(v^* u' - (v^*)' u) \right]_a^b. \quad (2.68)$$

Es conveniente mencionar algunas precisiones sobre las soluciones a la ecuación diferencial en cuestión. Como u y v son soluciones de una ecuación diferencial, es necesario establecer algunas condiciones con la finalidad de tener una solución única. El tipo de condiciones

que comúnmente se imponen en EDO son llamadas condiciones iniciales. Este tipo de condiciones son valores de la función y su derivada impuestos en un punto del espacio de la variable independiente. Otro tipo de condiciones, que son las que vamos a considerar aquí, son aquellas que se imponen no en un solo punto del espacio, sino en dos, comúnmente, los extremos del intervalo en el que buscamos la solución correspondiente. Este es conocido como el *problema de valor de frontera*. No es casualidad que consideremos condiciones en la frontera para este tipo de ecuaciones, al igual que lo hemos establecido para las ecuaciones en derivadas parciales. De hecho, la misma clasificación vista para ese caso aplica también aquí.

Concretamente, para el problema Sturm-Liouville vamos a imponer condiciones de frontera, que serán esencialmente valores que especificaremos para la función buscada (la solución) o su derivada. Si imponemos condiciones sobre la función en los extremos del intervalo (i.e., la frontera), denominaremos a tales condiciones de frontera como *tipo Dirichlet*, mientras que si especificamos los valores de la derivada en los extremos, las llamaremos de *tipo Neumann*. Existen otras condiciones de frontera que exploraremos más adelante conforme desarrollemos la teoría de Sturm-Liouville para varios problemas específicos.

Las condiciones de frontera que vamos a establecer son las siguientes: de manera general, vamos a pedir que los valores en la frontera del intervalo $[a, b]$ sean tales que

$$\left[p(v^*u' - (v^*)'u) \right]_a^b = 0. \quad (2.69)$$

Como se puede notar, hay varias maneras de garantizar que esto sea cierto. Por ejemplo, si el valor de las soluciones u y v es cero en los extremos, podemos garantizar esta identidad. Lo mismo ocurre si pedimos que los valores de las derivadas de u y v sean cero en los extremos. Cuando imponemos las condiciones de frontera para satisfacer la identidad (2.69), es claro que las soluciones al problema Sturm-Liouville adquieren una propiedad importante que se puede escribir de la siguiente manera:

$$(\lambda - \lambda')\langle v|u \rangle = 0. \quad (2.70)$$

Esta igualdad nos dice lo siguiente: si $\lambda \neq \lambda'$, entonces, las funciones propias u y v asociadas a estos valores propios son también diferentes, pero con un producto interno que se hace cero. Por el contrario, cuando $\lambda = \lambda'$, dicho producto no desaparece necesariamente, pero la igualdad se sigue preservando, pues, en este caso claramente tenemos que $\lambda - \lambda' = 0$. Así, puesto que el producto interno entre dos funciones propias diferentes es cero, en consecuencia, dichas funciones son *ortogonales*.

Bajo ciertas condiciones, es posible garantizar que el conjunto de todas las funciones propias de un operador con la forma autoconjugada forme una base numerable del espacio de Hilbert, es decir, el conjunto de las funciones cuadrado-integrables en $[a, b]$. Este resultado

es importante puesto que cualquier función de dicho conjunto debería poder expresarse como una combinación lineal de los elementos de dicha base. En otras palabras, si $f(x)$ es una función arbitraria, entonces, el teorema de Sturm-Liouville garantiza que esta función puede escribirse como una combinación lineal o, mejor dicho, un desarrollo en serie de las funciones propias,

$$f(x) = \sum_n a_n u_n(x), \quad (2.71)$$

donde $\{u_n(x)\}$ es el conjunto de funciones propias de algún operador con la forma Sturm-Liouville. Los coeficientes del desarrollo se obtienen, como veremos más adelante, explotando la propiedad de ortogonalidad.

2.3. La forma Sturm-Liouville de una EDO

Por último, conviene establecer un resultado adicional: hemos indicado que al resolver el problema de valores propios y funciones propias de operadores autoconjugados (el problema de Sturm-Liouville) podemos obtener un conjunto de funciones que sirven como una base ortogonal, en términos de la cual podemos desarrollar cualquier función y, en particular, la solución del problema al que nos enfrentamos. Sin embargo, tenemos un hueco enorme, pues no hemos considerado el caso en que el operador no tenga la forma autoconjugada. Esto, como mencionamos anteriormente, no representa gran problema puesto que todo operador diferencial de segundo orden lineal puede llevarse a la forma autoconjugada.

Consideremos el problema de valores y funciones propias en forma arbitraria, es decir, cuando el operador diferencial no tiene la forma Sturm-Liouville,

$$p_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x)y(x) = \lambda w_0(x)y(x). \quad (2.72)$$

Para llevar esta EDO de segundo orden a la forma autoconjugada, seguiremos un procedimiento similar al que se lleva a cabo para hacer las EDO lineales exactas. Es decir, vamos a suponer que existe una función $\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, al multiplicar la ecuación (2.72) por ω , obtengamos la forma autoconjugada. Es decir, la función ω hace las veces de “factor integrante” para EDO lineales de primer orden. Si tomamos la ecuación (2.72) y la multiplicamos por ω , obtenemos

$$\omega(x)p_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \omega(x)p_1(x) \frac{dy}{dx} + \omega(x)p_0(x)y(x) = \lambda \omega(x)w_0(x)y(x). \quad (2.73)$$

Nuestro objetivo es hallar la función $\omega(x)$ para la cual la ecuación (2.73) tiene la forma autoconjugada, es decir, cuándo la ecuación (2.73) tiene la forma

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), \quad (2.74)$$

o bien, en su forma desarrollada

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p'(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y(x) = \lambda w(x)y(x). \quad (2.75)$$

Para hallar la función ω tenemos que comparar término a término la ecuación (2.73) con la ecuación (2.75). Haciendo esto obtenemos las siguientes igualdades

$$p(x) = \omega(x)p_2(x), \quad (2.76)$$

$$p'(x) = \omega(x)p_1(x), \quad (2.77)$$

$$q(x) = \omega(x)p_0(x), \quad (2.78)$$

$$w(x) = \omega(x)w_0(x), \quad (2.79)$$

No es difícil notar que las ecuaciones (2.76) y (2.77) nos llevan a la siguiente identidad,

$$\frac{d}{dx} \left(\omega(x)p_2(x) \right) = \omega(x)p_1(x), \quad (2.80)$$

misma que se puede reescribir como

$$p_2(x) \frac{d\omega}{dx} + (p_2'(x) - p_1(x))\omega(x) = 0. \quad (2.81)$$

Esta última igualdad resulta ser una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para la función desconocida ω , la cual se puede resolver fácilmente, lo que resulta en

$$\omega(x) = \frac{1}{p_2(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right). \quad (2.82)$$

Una vez que se tiene la función ω de manera explícita, los demás elementos de la ecuación en la forma Sturm-Liouville se pueden obtener directamente. Resumiendo tenemos que

$$p(x) = \omega(x)p_2(x) = \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right), \quad (2.83)$$

$$q(x) = \omega(x)p_0(x) = \frac{p_0(x)}{p_2(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right), \quad (2.84)$$

$$w(x) = \omega(x)w_0(x) = \frac{w_0(x)}{p_2(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)} dt \right). \quad (2.85)$$

2.4. Ejercicios

1. Considera producto interno definido como

$$\langle f|g \rangle := \int_a^b w(t)f^*(t)g(t)dt, \quad (2.86)$$

para cualesquiera dos funciones reales $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ y siendo $w(t)$ la función de peso. En cada uno de los casos siguientes muestra si las funciones son ortogonales o no, usando los correspondientes valores de a , b y $w(t)$:

- i. $a = 0$, $b = 2\pi$, $w(t) = 1$, $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos^2(t)$.
 - ii. $a = 0$, $b = \pi$, $w(t) = t$, $f(t) = \sin^2(t)$, $g(t) = \cos^2(t)$.
 - iii. $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$, $f(t) = t^2$, $g(t) = 4t - t^2$.
 - iv. $a = 0$, $b = 2\pi$, $w(t) = 1$, $f(t) = e^{4it}$, $g(t) = e^{5it} + 3e^{-it}$.
2. Convierte las siguientes ecuaciones a la forma Sturm-Liouville. Identifica claramente las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $w(x)$ en cada caso.

$$-4x^2y'' + x^3y' + 2x^4y = \lambda y, \quad (2.87)$$

$$3y'' + x^{-1}y' + x(1-x)y = \lambda xy, \quad (2.88)$$

$$3(1-x^2)y'' - 4xy' + xy = \lambda(1-x)y, \quad (2.89)$$

$$x^{-1}y'' - xy' + 3(1-x^2)y = \lambda x^3y. \quad (2.90)$$

3. Considera el conjunto de funciones $\{t^n : n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}^+\}$ y defínase el producto interno como

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 w(t)f(t)g(t)dt, \quad (2.91)$$

para cualesquiera dos funciones reales $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y siendo $w(t) := 1$ la función de peso.

Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener los primeros tres vectores ortogonales que induce el producto interno definido.

4. Considera el conjunto de funciones $\{t^n : n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}^+\}$ y defínase el producto interno como:

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 w(t)f(t)g(t)dt, \quad (2.92)$$

para cualesquiera dos funciones reales $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y siendo $w(t) := 1$ la función de peso.

Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener los primeros cuatro vectores ortogonales que induce el producto interno definido.

5. Considera el conjunto de funciones $\{\sin(2\pi nt) + \cos(2\pi nt) : n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}^+\}$ y defínase el producto interno como

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 w(t)f(t)g(t)dt, \quad (2.93)$$

para cualesquiera dos funciones reales $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y siendo $w(t) := 1$ la función de peso.

Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener los primeros cuatro vectores ortogonales que induce el producto interno definido.

6. Considera el conjunto de funciones $\{t^n : n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}^+\}$ y defínase el producto interno como

$$\langle f|g \rangle = \int_0^\infty w(t)f(t)g(t)dt, \quad (2.94)$$

para cualesquiera dos funciones reales $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y siendo $w(t) := e^{-t}$ la función de peso.

Usa el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener los primeros tres vectores ortogonales que induce el producto interno definido.

7. Muestra que para cualquier $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ la función:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{c}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (2.95)$$

donde c es una constante arbitraria, resuelve la ecuación de Laplace en 3D, es decir, es solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.96)$$

¿Qué pasa cuando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$?

8. Muestra que la función $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la integral:

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (2.97)$$

resuelve la ecuación de Poisson en 3D, es decir, resuelve la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \rho(\mathbf{r}). \quad (2.98)$$

9. (a) Muestra que la función $\psi(x, t)$ definida como

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2.99)$$

resuelve la ecuación de onda 1D, es decir, resuelve la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.100)$$

donde c es una constante y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria dos veces diferenciable.

- (b) Muestra que la suma de funciones

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f_1(x - ct) + f_2(y - ct) + f_3(z - ct), \quad (2.101)$$

resuelve la ecuación de onda en 3D, es decir, es solución de:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.102)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y f_1 , f_2 y f_3 son funciones reales dos veces diferenciables.

- (c) Muestra que la función $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.103)$$

resuelve la ecuación de onda en 3D, siendo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ un vector constante, $\omega \in \mathbb{R}$ una constante real y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria dos veces diferenciable. ¿Qué condiciones debe cumplir $\mathbf{k}$ y ω ? Obtén una expresión para todos los vectores $\mathbf{k}$ que resuelven la ecuación de onda.

10. (a) Muestra que la función $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la integral:

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x') \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-(x-x')^2/4at} dx', \quad (2.104)$$

resuelve la ecuación de difusión 1D, es decir, es una solución de:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.105)$$

siendo $\rho_0(x')$ una función integrable.

(b) Evalúa la solución en $t = 0$ y en $t \rightarrow \infty$. ¿Qué sucede si no se cumple la condición de que $\rho_0(x')$ sea integrable?

(c) Muestra que la función $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la integral:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_0(\mathbf{r}') \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/4at} d^3\mathbf{r}', \quad (2.106)$$

resuelve la ecuación de difusión 3D, es decir, es una solución de:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (2.107)$$

siendo $\rho_0(\mathbf{r}')$ una función integrable en todo $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 3

El método de separación de variables

3.1. Separación de variables I

A continuación, vamos a presentar la técnica de separación de variables para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Esta metodología aprovecha la teoría de Sturm-Liouville, específicamente el teorema del desarrollo y las propiedades de ortogonalidad de las funciones propias, para establecer un método general para resolver esta clase de ecuaciones. Aunque, como he dicho, la metodología es ampliamente utilizada para resolver ecuaciones en derivadas parciales, no todas las soluciones halladas para ecuaciones de interés resultan en funciones conocidas.

El método de separación de variables es conocido también como el *método de Fourier*, según la *Encyclopedia of Mathematics* de la Sociedad Matemática Europea [22]. Según dicha fuente, el método de separación fue originalmente sugerido por d'Alembert en 1749 [15] para resolver la ecuación de onda. Posteriormente, el método fue desarrollado con profundidad por Fourier en *Théorie analytique de la chaleur* [21] y fue formulado con generalidad por Ostrogradski en 1828 [47].

En capítulos posteriores veremos cómo el método de separación nos conduce naturalmente a nuevas funciones que son, en cierto modo, especiales por desarrollarse dentro del marco de la teoría de Sturm-Liouville. En este capítulo, no vamos a introducir nuevas funciones, solamente nos limitaremos a presentar la metodología en casos sencillos en los que las soluciones se obtienen en términos de funciones elementales. Para este fin, vamos a emplear una de las ecuaciones más icónicas de la física: la ecuación de onda.

3.1.1. La ecuación de onda en 1D

La ecuación de onda es una ecuación que se encuentra comúnmente en el estudio de la física. Esta ecuación describe la propagación de una amplia variedad de ondas, como las sonoras, las de luz y las ondas en el agua, por citar algunos ejemplos. Para ilustrar la técnica de separación de variables, vamos a resolver la ecuación de onda en una dimensión dentro de un contexto específico, particularmente, pensando en el problema físico de la cuerda vibrante.

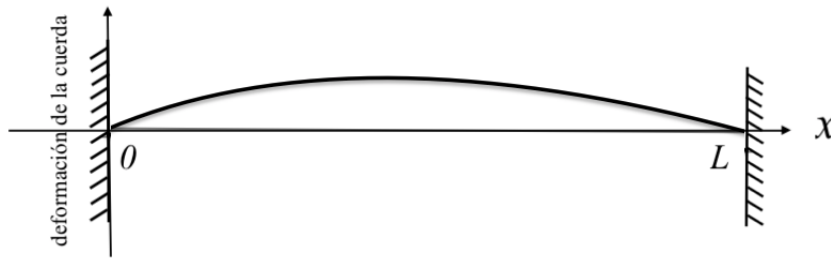


Figura 3.1: Representación esquemática de una cuerda vibrante. En el sistema físico se supone que una cuerda elástica se fija en los extremos a algún cuerpo inamovible. La tensión de la cuerda provoca vibraciones como lo haría, por ejemplo, una cuerda de guitarra u otro instrumento de cuerdas. La descripción de la deformación de la cuerda respecto de su posición de equilibrio mecánico se describe mediante la ecuación de onda.

Consideremos una cuerda tensa que, al deformarla un poco tiende a realizar un movimiento, tal como ocurre con una cuerda de guitarra, tal como se ilustra en la figura 3.1. De la teoría de la elasticidad de los materiales, se puede mostrar que las deformaciones de la cuerda, que están descritas por la función $\psi(x, t)$, la que llamaremos *perfil de deformaciones*, son gobernadas por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

en donde la variable x se supone que habita en el dominio $[0, L]$. Esto significa, simplemente, que el sistema de referencia se ha colocado de tal manera que uno de los extremos de la cuerda corresponde al punto $x = 0$ y el otro extremo a $x = L$.

Si bien contamos con la ecuación que gobierna la mecánica de las deformaciones de la cuerda, el problema no está completamente determinado, en el sentido de que establecer solo la ecuación diferencial no es garantía de obtener solución única. En la discusión del capítulo anterior, hemos visto que se requieren algunas condiciones adicionales para una solución única, condiciones que hemos denominado *condiciones de frontera* y *condiciones*

iniciales. En problemas físicos las condiciones de frontera y las condiciones iniciales son, generalmente, constricciones o condiciones físicas que satisfacer, a fin de que la solución tenga sentido físico. Por ejemplo, la cuerda vibrante por estar fija en los extremos, las deformaciones en los extremos de la cuerda deben ser nulas. Matemáticamente, esto significa que la función que buscamos en el dominio $[0, L]$ debe ser tal que la función $\psi(x, t)$ valga cero cuando $x = 0$ y cuando $x = L$ sin importar el valor de t . Estas serán las condiciones de frontera para nuestro problema. De manera análoga, las condiciones iniciales provienen de consideraciones físicas. Al tiempo $t = 0$ tenemos que la función $\psi(x, t)$ debe tener un valor inicial, es decir, la cuerda debe tener una deformación inicial la cual será descrita por una función $f(x)$. Asimismo, debemos también establecer un perfil de velocidades inicial, es decir, debemos indicar la forma inicial de la derivada del campo de deformaciones $\psi(x, t)$ respecto al tiempo, función que denotaremos por $g(x)$, esto es, $\partial_t \psi(x, t = 0) = g(x)$. En resumen, para resolver el problema físico de la cuerda vibrante, es necesario establecer la ecuación diferencial que debe satisfacer la función desconocida, así como sus correspondientes condiciones iniciales y condiciones en la frontera.

Ecuación de onda 1D con condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Condiciones de frontera

$$\psi(x = 0, t) = 0$$

$$\psi(x = L, t) = 0$$

Condiciones iniciales

$$\psi(x, t = 0) = f(x)$$

$$\partial_t \psi(x, t = 0) = g(x)$$

La técnica de separación de variables supone que la función que buscamos se puede escribir como un producto de funciones, una que depende solo de x y otra que solo depende de la variable temporal t . De este modo tenemos que $\psi(x, t) = X(x)T(t)$. A esta expresión nos referiremos como la *hipótesis de separación*. En este punto, conviene hacer un poco de reflexión respecto a esta hipótesis. El objetivo de esta hipótesis es reducir el problema de resolver una ecuación en derivadas parciales en un problema que consiste en buscar soluciones para $X(x)$ y para $T(t)$ de manera separada, a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego veremos si los problemas simplificados (las ecuaciones diferenciales ordinarias separadas) se pueden resolver de manera más fácil y directa.

Usando la hipótesis de separación, escribimos la función $\psi(x, t)$ como un producto de funciones $\psi(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la ecuación de onda (3.1) obtenemos:

$$T \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{X}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (3.2)$$

Se debe hacer notar que ya no aparecen derivadas parciales en la igualdad anterior. Esto es debido a que las funciones $X(x)$ y $T(t)$ solo depende de una variable independiente. Si

ahora dividimos entre XT , queda claro que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (3.3)$$

Debemos poner especial atención en esta última igualdad. Debido a que cada lado de la igualdad depende únicamente de una variable independiente (el lado derecho depende de t , mientras que el izquierdo de x), cabe destacar que la única forma de satisfacer dicho requisito es que ambas funciones sean constantes. Esto debido a que la igualdad (3.3) debe valer sin importar el valor de t ni el valor de x , pues son variables independientes. En virtud de esto, de la ecuación (3.3) se desprenden dos igualdades:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda, \quad (3.5)$$

en las que λ denota la constante a la que debe ser igual cada miembro de la ecuación (3.3). Esta constante recibe el nombre especial de *constante de separación*.

Hasta este punto, la hipótesis de separación nos ha brindado el beneficio de pasar de una ecuación en derivadas parciales a un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones (3.4) y (3.5), que pueden escribirse de una forma más cómoda a la vista como:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X(x), \quad (3.6)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda c^2 T(t). \quad (3.7)$$

Las ecuaciones anteriores nos resultan ahora bastante familiares, puesto que podemos escribir las soluciones directamente. No obstante, como resultado de este procedimiento, tenemos ahora que determinar no solo las soluciones $X(x)$ y $T(t)$, sino que también debemos determinar el valor, o mejor dicho, los valores de la constante de separación λ . Veremos ahora por qué el valor de λ no es, necesariamente, único.

Es relevante resaltar, además, que las ecuaciones (3.6) y (3.7) tienen la forma Sturm-Liouville. Esto implica que dichas ecuaciones se pueden interpretar como problemas de valores y funciones propias. La teoría de Sturm-Liouville ha demostrado varias cualidades de las soluciones de este tipo de problema, entre otras, que podemos obtener múltiples soluciones (típicamente serán infinitas). Estas soluciones, además de tener la propiedad de ortogonalidad, conformarán un conjunto completo de funciones en términos de las cuales se puede escribir cualquier función como combinación lineal de estas, incluyendo la solución que buscamos, claramente. En esta breve historia, la constante de separación juega un papel crucial, como a continuación explicaremos.

Antes de resolver las ecuaciones (3.6) y (3.7), debemos tener claro el rol de la constante λ . Puesto que, como hemos mencionado, dichas ecuaciones tienen la forma autoconjugada, sabemos que los valores propios correspondientes deben ser reales. Hasta este punto, entonces, debemos suponer que λ podría tomar cualquier valor real. No obstante, veremos que, en realidad, los valores de λ no siempre serán *todos* los reales, ya que descartaremos algunos en el camino. Ahora, con respecto a las ecuaciones (3.6) y (3.7), es posible ver que las soluciones para $X(x)$ y $T(t)$ dependen de si la constante λ es positiva o negativa. De hecho, si λ fuera positiva, es claro que las soluciones correspondientes serían:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad (3.8)$$

$$T(t) = Ce^{\sqrt{\lambda}ct} + Ce^{-\sqrt{\lambda}ct}. \quad (3.9)$$

Por el contrario, si λ fuera negativa, lo cual escribiremos como $\lambda = -k^2$, con $k \in \mathbb{R}$, entonces, las soluciones correspondientes tendrían la forma:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (3.10)$$

$$T(t) = C \cos(ckt) + D \sin(ckt). \quad (3.11)$$

Es interesante hacer notar que las soluciones (3.8) y (3.9) se conectan con las soluciones (3.10) y (3.11) a través del remplazo de k por ik , de modo que son extensiones unas de las otras. También es importante notar que el caso particular de $k = 0$ (que corresponde al valor $\lambda = 0$) da soluciones triviales para X y T , es decir, funciones constantes. Sin embargo, estas funciones constantes no son las soluciones completas para el caso $\lambda = 0$. Por ahora, no nos ocuparemos de este caso, más adelante abordaremos un ejemplo en donde estas soluciones se pueden aprovechar para resolver problemas con cierto tipo de condiciones iniciales.

Hasta este momento ambos tipos de soluciones son igualmente válidas, no tenemos aún ningún criterio para descartar alguna de estas opciones. Sin embargo, debido a las restricciones impuestas por las condiciones de frontera, tendremos que solo cierto tipo de soluciones son admisibles. Vamos a recordar las condiciones en la frontera, veremos cómo se traducen estas condiciones a las funciones X y T . De hecho, no es difícil darse cuenta de que:

$$\psi(x=0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \quad (3.12)$$

$$\psi(x=L, t) = X(L)T(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad X(L) = 0, \quad (3.13)$$

lo cual se debe a que las condiciones anteriores deben valer para todo t , de modo que la única forma de garantizarlas es imponiendo las condiciones en $X(x)$. Esto quiere decir que las soluciones que buscamos para $X(x)$ deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$X(0) = 0, \quad y \quad X(L) = 0. \quad (3.14)$$

Estas últimas condiciones nos limitan las posibles soluciones a las dadas por las ecuaciones (3.10) y (3.11), es decir, las soluciones obtenidas por suponer que λ fuese negativo. Esta elección obedece al hecho de que, con el fin de satisfacer las condiciones (3.14), las soluciones $X(x)$ deben tener por lo menos un par de raíces reales¹.

Con este razonamiento, podemos ver que hemos reducido los valores de λ únicamente a reales negativos, pues incluso le hemos dado la forma $\lambda = -k^2$, lo que nos lleva al tipo de soluciones, para $X(x)$, siguiente:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (3.15)$$

Vamos ahora a hacer que $X(x)$ de la ecuación anterior cumpla con las condiciones (3.14). Para empezar, podemos ver que si hacemos $x = 0$, tenemos que $X(0) = A$, lo que debe ser cero siempre. Así que tenemos que fijar $A = 0$ para cumplir con esta primera condición de frontera. Si hacemos $A = 0$ y, además, hacemos $x = L$ en $X(x)$, tenemos que:

$$X(L) = B \sin(kL) = 0. \quad (3.16)$$

La única manera de cumplir con la igualdad anterior sin llegar a la solución trivial es hacer que kL sea un múltiplo entero de π , lo que implica que:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (3.17)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que la constante de separación λ se convierte en:

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (3.18)$$

Por comodidad, vamos a añadir un índice n a la constante de separación y a la variable k , así como a la solución correspondiente:

$$\lambda_n := -k_n^2, \quad k_n := \frac{n\pi}{L}. \quad (3.19)$$

Esto es, asociado a valor propio $\lambda_n := -k_n^2$, la solución $X_n(x)$ está dada, hasta en una constante de integración, por:

$$X_n(x) = B_n \sin(k_n x). \quad (3.20)$$

Se debe hacer notar lo siguiente: en este momento, hemos reducido aún más el conjunto de posibles valores para λ , la constante de separación. Ya habíamos establecido que solo

¹Las funciones exponenciales $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$ no tienen raíces reales, mientras que la combinación lineal $Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$ podría, como mucho, tener una sola raíz real. Esto no es, sin embargo, suficiente para cumplir las condiciones (3.14) simultáneamente.

valores negativos de λ podrían ayudar a obtener soluciones que cumplieran con las condiciones de frontera, pero al imponerlas, nos hemos percatado de que ahora los valores de la constante de separación quedan limitados solamente a los $\lambda_n = -k_n^2$, con $n \in \mathbb{Z}$. Pero ahora notemos que cambiar cualquier valor de n negativo conduce al mismo valor para λ_n . No solamente eso, si observamos la solución $X_n(x)$, es claro que $X_n(x) = -X_{-n}(x)$. Esto quiere decir que $X_n(x)$ es linealmente dependiente de $X_{-n}(x)$, por lo cual incluir los valores negativos de n (incluyendo a $n = 0$, pues nos da la solución trivial) no ofrece nuevas soluciones linealmente independientes. De esta manera, tenemos que el conjunto de soluciones óptimo en el sentido de independencia lineal está dado por:

$$\{u_n(x) := \sin(k_n x) : n \in \mathbb{N}\}. \quad (3.21)$$

asociados a los valores propios λ_n .

La teoría de Sturm-Liouville garantiza que el conjunto de funciones (3.21) es un conjunto completo de funciones ortogonales con el producto interno:

$$\langle u_n | u_{n'} \rangle := \int_0^L u_n(x) u_{n'}(x) dx = N_n^2 \delta_{n,n'} \quad (3.22)$$

que forma una base en el espacio de funciones cuadrado-integrables en $[0, L]$. Este resultado permite, entre otras cosas, escribir la solución deseada como una combinación lineal de los elementos de dicha base, algo que pondremos en práctica a continuación. La constante N_n la llamaremos constante de normalización y, en este caso especial, N_n^2 viene dada por:

$$N_n^2 := \langle u_n | u_n \rangle := \int_0^L u_n(x) u_n(x) dx = \frac{L}{2}, \quad (3.23)$$

de manera que la relación de ortogonalidad para estas funciones puede escribirse explícitamente como:

$$\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_{n'} x) dx = \frac{L}{2} \delta_{n,n'}. \quad (3.24)$$

Una vez que hemos hallado la constante de separación, podemos obtener las correspondientes funciones que dependen del tiempo $T(t)$. Como a cada λ_n le corresponde una solución $T(t)$, indizaremos dicha función con el entero n . De esta forma, si denotamos por ω_n el producto $k_n c$, tenemos que la ecuación (3.11) puede escribirse como:

$$T_n(t) = C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t). \quad (3.25)$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ el producto $\psi_n(x, t) := X_n(x) T_n(t)$ resuelve la ecuación de onda (3.1) con las condiciones de frontera impuestas, es decir, $\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$.

Sin embargo, aún no se ha resuelto el problema completamente, pues estas funciones no satisfacen las condiciones iniciales:

$$\psi(x, t = 0) = f(x), \quad \partial_t \psi(x, t = 0) = g(x, t). \quad (3.26)$$

Para hallar una función $\psi(x, t)$ que cumpla con las condiciones iniciales, podemos hacer uso de la teoría de Sturm-Liouville, la cual garantiza que cualquier función puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de la base. En este caso, el teorema del desarrollo establece que la solución que buscamos debe poder escribirse como una serie de la siguiente forma:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \left[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \right]. \quad (3.27)$$

De este modo, lo único que tenemos que hacer a continuación es hallar los coeficientes C_n y D_n a partir de las condiciones iniciales. De hecho, imponiendo tales condiciones obtenemos las ecuaciones:

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_n x) = f(x), \quad (3.28)$$

$$\partial_t \psi(x, t = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n D_n \sin(k_n x) = g(x). \quad (3.29)$$

Para hallar los coeficientes C_n y D_n vamos a hacer uso de la relación de ortogonalidad entre de las funciones $\{u_n(x) = \sin(k_n x)\}$ que ya dejamos establecidas a través de la igualdad (3.24). Si multiplicamos ambos lados de la igualdad (3.28) por $\sin(k_m x)$ para un $m \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(k_m x) \sin(k_n x) = f(x) \sin(k_m x), \quad (3.30)$$

e integrando de 0 a L se obtiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^L \sin(k_m x) \sin(k_n x) dx = \int_0^L f(x) \sin(k_m x) dx \quad (3.31)$$

y usando el hecho de que $\sin(k_m x)$ y $\sin(k_n x)$ son ortogonales se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n L}{2} \delta_{n,m} = \int_0^L f(x) \sin(k_m x) dx, \quad (3.32)$$

lo que implica inmediatamente que:

$$\frac{C_m L}{2} = \int_0^L f(x) \sin(k_m x) dx, \quad (3.33)$$

o bien,

$$C_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_m x) dx, \quad (3.34)$$

que es la expresión para los coeficientes que estábamos buscando.

No es difícil darse cuenta de que los coeficientes del desarrollo D_n pueden obtenerse de manera análoga, siguiendo los mismos pasos que hemos seguido para obtener C_n . Se puede probar sin mucho esfuerzo que:

$$D_m = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L g(x) \sin(k_m x) dx, \quad (3.35)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

En el siguiente cuadro resumimos la solución particular para este problema.

Resumen de solución		
Ecuación de onda 1D con condiciones de frontera tipo Dirichlet		
$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera $\psi(x=0, t) = 0$ $\psi(x=L, t) = 0$	Condiciones iniciales $\psi(x, t=0) = f(x)$ $\partial_t \psi(x, t=0) = g(x)$
Solución en serie por separación de variables		
$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \left[C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \right].$		
$k_n := \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n := k_n c = \frac{n\pi c}{L}.$		
$D_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx, \quad C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx.$		

Ejemplo 3.1.1. Vamos a realizar el cálculo con determinadas condiciones iniciales para obtener los coeficientes del desarrollo. Como primer ejemplo, vamos a tomar el caso en que $g(x) = 0$, condición equivalente a decir que la cuerda tiene velocidad cero al inicio, el movimiento parte del reposo, mientras que la función $f(x)$ la tomaremos como $f(x) = \delta(x - x_0)$, lo que equivale a que la condición inicial es una deformación infinita en el punto x_0 con $x_0 \in (0, L)$.

Los coeficientes, en este caso, se pueden calcular directamente sin mucho esfuerzo, ya que

$$D_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx = 0, \quad (3.36)$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - x_0) \sin(k_n x) dx = \frac{2}{L} \sin(k_n x_0). \quad (3.37)$$

Estos resultados muestran que la solución en serie se reduce a la siguiente expresión:

$$\psi(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \sin(k_n x) \sin(k_n x_0) \cos(\omega_n t). \quad (3.38)$$

Con la expresión que tenemos en esta última ecuación, podemos proceder a evaluar la función $\psi(x, t)$ y observar su evolución en el tiempo. Tomando $L = 1$ y $c = 1$, y calculando la serie (3.38) hasta 1000 términos (en un código escrito en Python), podemos ver en la figura 3.2 la evolución en el tiempo de la vibración de la cuerda con deformación inicial delta.

3.1.2. La ecuación de conducción de calor 1D

Vamos ahora a poner en práctica el método de solución por separación de variables con una ecuación de tipo parabólico que se origina en la física: la ecuación de conducción de calor. Consideremos un material unidimensional, de longitud L , que tiene una difusividad térmica α . Cuando dicho material se pone en contacto por sus extremos a dos fuentes de calor, una a temperatura U_1 y otra a temperatura U_2 , la ecuación que describe el cambio del campo de temperaturas $U(x, t)$ a lo largo del material y a lo largo del tiempo viene dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (3.39)$$

Hay que notar que en este caso la derivada respecto al tiempo es de primer orden, lo que indica que el problema debería estar completamente definido si se establece una sola condición inicial, además de las condiciones de frontera ya mencionadas. En concordancia con la física de problema, es claro que la condición inicial corresponde al campo de temperaturas que el cuerpo posee justo en el instante en que se pone en contacto con las fuentes de calor en los extremos. Con esto tenemos que el problema dado por la ecuación (3.39) queda completamente especificado con las condiciones de frontera:

$$U(x = 0, t) = U_1, \quad U(x = L, t) = U_2, \quad (3.40)$$

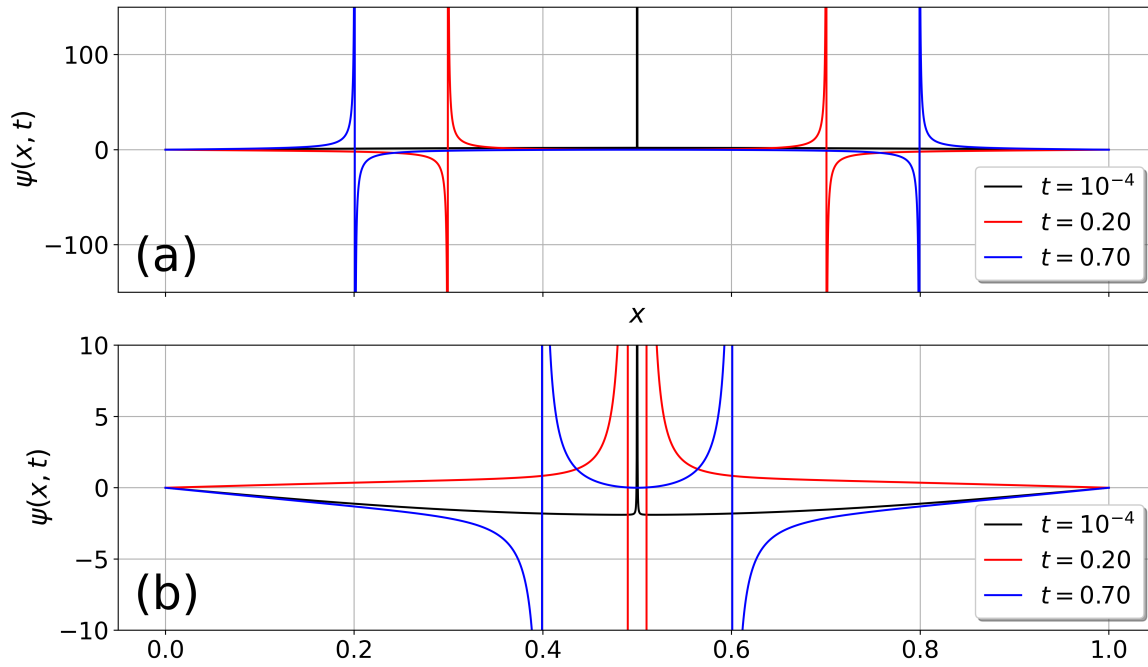


Figura 3.2: Evolución temporal de la vibración de la cuerda con deformación inicial delta y velocidad cero. (a) Se muestra la deformación casi inicial, es decir, a un tiempo muy pequeño de $t = 10^{-4}$, con forma delta (línea negra). También se muestra la deformación de la cuerda a tiempos posteriores, a $t = 0.20$ (línea azul) y a $t = 0.70$ (línea roja). Hay que notar que la deformación de la cuerda se propaga desde el centro dividiéndose en dos pulsos, uno que viaja a la izquierda y otro a la derecha. En el panel (b), se muestra un acercamiento de las gráficas mostradas en el panel (a) para apreciar mejor el detalle de las deformaciones de la cuerda.

y la condición inicial

$$U(x, t = 0) = U_0(x). \quad (3.41)$$

Ecuación del calor 1D con condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Condiciones de frontera

$$U(0, t) = U_1, \\ U(L, t) = U_2,$$

Condiciones iniciales

$$U(x, t = 0) = U_0(x)$$

Vamos a aplicar el método de separación de variables. Como sabemos, lo primero que debemos hacer es suponer que la función que buscamos se puede escribir como el producto

de dos funciones, una que depende de x y otra que depende de t , esto es:

$$U(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.42)$$

Sin embargo, antes de avanzar necesitamos hacer una observación acerca de esta hipótesis. Primero, debemos darnos cuenta de que al imponer las condiciones de frontera (3.40) obtenemos las siguientes condiciones:

$$U(x = 0, t) = X(0)T(t) = U_1, \quad U(x = L, t) = X(L)T(t) = U_2, \quad (3.43)$$

es decir, necesitamos que se cumpla que

$$T(t) = U_1/X(0), \quad y \quad T(t) = U_2/X(L). \quad (3.44)$$

Como $X(0)$ es un valor numérico constante al igual que lo es $X(L)$, podemos identificar una gran inconsistencia: la función $T(t)$ debe ser una constante ($U_1/X(0)$), pero, al mismo tiempo, debe ser igual a otra constante ($U_2/X(L)$), lo que es imposible de satisfacer si dichas constantes son distintas. Incluso si fueran iguales, el hecho de tener $T(t)$ fija a una constante para todo t indica que este camino no parece correcto. Y no lo es.

Para evitar este problema vamos a hacer una observación más. Notemos que la ecuación diferencial (3.39) admite una solución que no depende del tiempo. Esto es, si hacemos la suposición de que la función buscada no depende de t , función que denotaremos por $u_s(x)$ (por tratarse de una solución especial que no es la que buscamos necesariamente), entonces, dicha función debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\alpha \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = 0. \quad (3.45)$$

Como u_s solo depende de x podemos usar derivadas ordinarias y notar que u_s satisface igualmente la ecuación:

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} = 0, \quad (3.46)$$

la que podemos resolver inmediatamente, obteniendo:

$$u_s(x) = a + bx, \quad (3.47)$$

siendo a y b constantes de integración.

Para evitar el problema que planteamos en la separación de variables vamos a aprovechar esta solución especial de la ecuación de conducción del calor para hacer que la función $u_s(x)$ satisfaga las condiciones de frontera y propondremos una nueva función cuyos valores en la

frontera sean cero. Comencemos haciendo que la solución especial que hallamos satisfaga las condiciones de frontera (3.40). Si evaluamos $u_s(x)$ en cero y en $x = L$, obtenemos:

$$u_s(0) = a = U_1, \quad u_s(L) = a + bL = U_2. \quad (3.48)$$

No es difícil observar que las condiciones anteriores fijan sin ambigüedad las constantes de integración a y b . A saber:

$$a = U_1, \quad b = \frac{U_2 - U_1}{L}. \quad (3.49)$$

Con esto tenemos que la solución especial queda de la siguiente forma:

$$u_s(x) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L}. \quad (3.50)$$

Ya que hemos construido nuestra solución especial $u_s(x)$ que satisface las condiciones de frontera (3.40), vamos a proponer que la función $U(x, t)$ que buscamos sea la suma de $u_s(x)$ más otra función aún desconocida $u(x, t)$, es decir,

$$U(x, t) = u_s(x) + u(x, t). \quad (3.51)$$

Si introducimos esto en la ecuación de conducción del calor, no es difícil darse cuenta de que la función $u(x, t)$ satisface la misma ecuación. Esto se debe a que la ecuación en derivadas parciales (EDP) es lineal, de modo que el operador diferencial saca constantes y se distribuye sobre la suma. Como estamos suponiendo que la función U es la suma de dos contribuciones, una de las cuales, $u_s(x)$, ya satisface la EDP en cuestión, es claro por linealidad que la otra función, $u(x, t)$, también la satisface. Esto es lo que en física se suele denominar *principio de superposición*. El cual, esencialmente, establece que un campo (en este caso escalar) se puede escribir como la superposición (suma, o de manera más general, combinación lineal) de dos campos de la misma naturaleza física.

Respecto a la solución de nuestro problema: una vez que hemos escrito el campo de temperaturas como la suma de las contribuciones $u_s(x)$, que ya conocemos, y $u(x, t)$, que aún desconocemos, lo que tenemos que hacer es definir completamente el problema para esta última función. Por linealidad ya sabemos que $u(x, t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.52)$$

Lo que sigue es definir tanto las condiciones iniciales como las condiciones en la frontera.

Como la función $u_s(x)$ ya satisface las condiciones de frontera, y como el campo $U(x, t)$ sabemos que debe satisfacer las mismas condiciones que u_s ya satisface, solo resta que la función $u(x, t)$ satisfaga las condiciones:

$$u(x = 0, t) = 0, \quad u(x = L, t) = 0, \quad (3.53)$$

con la condición inicial:

$$u(x, t = 0) = u_0(x) := U_0(x) - u_s(x). \quad (3.54)$$

Esta última condición se sigue directamente del hecho de haber escrito $U = u_s + u$.

Ahora estamos listos para aplicar el método de separación de variables. Podemos suponer que la función $u(x, t)$ puede escribirse como el producto de dos funciones, es decir, $u(x, t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo esto dentro de la ecuación (3.52) obtenemos:

$$X \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad (3.55)$$

y al dividirlo entre XT resulta en:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (3.56)$$

Ahora, con base en el argumento de la separación, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias de la siguiente forma:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \alpha \lambda, \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda, \quad (3.58)$$

siendo λ la constante de separación. Sabemos que para hallar los valores permitidos para la constante de separación necesitamos imponer las condiciones de frontera. Así, vamos primero a ver cómo se escriben las condiciones (3.53) en términos de la función $X(x)$. De hecho, no es difícil ver que:

$$u(x = 0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \quad (3.59)$$

$$u(x = L, t) = X(L)T(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad X(L) = 0. \quad (3.60)$$

Como la solución para $X(x)$ es de la forma:

$$X(x) = e^{\pm\sqrt{\lambda}x}, \quad (3.61)$$

es claro que, dependiendo del signo de λ , podemos tener exponenciales reales o imaginarias como solución. Esto quiere decir que, debido a que las condiciones de frontera nos obligan a que las soluciones tengan raíces reales, debemos escribir las soluciones $X(x)$ como exponenciales imaginarias o en su versión como funciones trigonométricas, esto es:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad (3.62)$$

donde la variable k la hemos escogido de tal forma que la constante de separación toma la forma:

$$\lambda = -k^2. \quad (3.63)$$

Si imponemos las condiciones de frontera (3.59) y (3.60) en la solución $X(x)$, obtenemos:

$$X(0) = A = 0, \quad X(L) = A \cos(kL) + B \sin(kL), \quad (3.64)$$

Estas condiciones se satisfacen haciendo $A = 0$ claramente y haciendo $\sin(kL) = 0$. Es decir, la constante k multiplicada por L debe ser igual a alguna raíz de la función seno. De esta manera, tenemos que la constante k se puede escribir como:

$$k = k_n := \frac{n\pi}{L}, \quad (3.65)$$

lo que indica que la constante de separación λ se escribe como

$$\lambda = \lambda_n := \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \quad (3.66)$$

Entonces, las soluciones para la función que depende de la variable espacial x , pueden escribirse como:

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin(k_n x). \quad (3.67)$$

Una vez que tenemos los valores de la constante de separación $\lambda = \lambda_n$ podemos escribir igualmente las soluciones para la parte temporal. De hecho, en la ecuación (3.57) podemos ver que

$$T_n(t) = C_n e^{\alpha \lambda_n t} = C_n e^{-\alpha k_n^2 t}. \quad (3.68)$$

Esto quiere decir que el conjunto de soluciones que resuelve la ecuación (3.52) con las condiciones de frontera (3.53) viene dada por el producto $X_n(x)T_n(t)$, es decir:

$$u_n(x, t) = \sin(k_n x) e^{-\alpha k_n^2 t}. \quad (3.69)$$

Finalmente, para hallar la solución de la ecuación diferencial (3.52) con las condiciones de frontera (3.53) y las condiciones iniciales (3.54), vamos a usar la teoría de Sturm-Liouville que nos permite escribir la solución deseada como combinación lineal de las funciones u_n , esto es,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-\alpha k_n^2 t}, \quad (3.70)$$

siendo A_n una constante por determinarse a partir de las condiciones iniciales. De hecho, para determinar A_n primero fijamos la condición inicial (3.54) obteniendo la identidad:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x). \quad (3.71)$$

de esta manera, haciendo uso de la relación de ortogonalidad provista por la teoría de Sturm-Liouville, tenemos que:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(k_n x) dx. \quad (3.72)$$

De esta manera, obtenemos la solución a nuestro problema original, es decir, hallar la función $U(x, t)$ que resuelve la ecuación en derivadas parciales (3.39) con las condiciones de frontera (3.40) y las condiciones iniciales (3.41), lo cual se puede escribir como:

$$U(x, t) = u_s(x) + u(x, t). \quad (3.73)$$

Recordando que $u_s(x) = U_1 + (U_2 - U_1)x/L$, tenemos que $U(x, t)$ puede escribirse explícitamente como

$$U(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-\alpha k_n^2 t}, \quad (3.74)$$

con los coeficientes del desarrollo dados por:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L \left[U_0(x) - U_1 - (U_2 - U_1) \frac{x}{L} \right] \sin(k_n x) dx, \quad (3.75)$$

donde $U_0(x)$ es el perfil de temperaturas inicial.

Resumen de solución

Ecuación del calor 1D con condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} U(0, t) &= U_1, \\ U(L, t) &= U_2, \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

$$U(x, t = 0) = U_0(x)$$

$$U(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) e^{-\alpha k_n^2 t},$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_0^L \left[U_0(x) - U_1 - (U_2 - U_1) \frac{x}{L} \right] \sin(k_n x) dx, \quad k_n := \frac{n\pi}{L}.$$

3.1.3. La ecuación de onda en 2D

Vamos ahora a ilustrar la técnica de separación de variables para resolver un problema en más de una dimensión. A continuación, consideraremos la ecuación de onda en 2D y analizaremos la forma de resolverla usando la técnica de separación de variables. Comencemos estableciendo con todo detalle el problema físico que nos interesa resolver.

Nuestro problema se origina cuando queremos describir las deformaciones de una hoja elástica de forma cuadrada con su perímetro fijo a alguna superficie rígida. Es decir, vamos a considerar el problema de describir las deformaciones de una “hoja de tambor”.

Si denotamos por $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, t)$ el campo de deformaciones de una hoja de tambor, la ecuación en derivadas parciales que describe la dinámica de $\psi(\mathbf{r}, t)$ viene dada por la ecuación de onda 2D, es decir,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.76)$$

siendo c^2 una constante que depende de las características del material. Como los extremos de la hoja de tambor están fijos, naturalmente, las condiciones de contorno en este caso vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \psi(0, y, t) = 0, \quad \text{(II)} \quad \psi(0, y, t) = 0, \\ \text{(III)} & \psi(x, 0, t) = 0, \quad \text{(IV)} \quad \psi(x, L, t) = 0. \end{array}$$

Se debe notar que estas condiciones de contorno toman en cuenta que el sistema de referencia se ha colocado de tal manera que una de las esquinas de la hoja cuadrada coincide con el origen. Esto se aprecia mejor en la figura [3.3](#), en la que se muestra claramente la ubicación de las líneas (I)-(IV) que delimitan la hoja de tambor, en las cuales el campo de deformaciones $\psi(x, y, t)$ debe desaparecer.

Además de las condiciones de contorno, es necesario establecer las condiciones iniciales. Como tenemos una ecuación de segundo orden en el tiempo, se debe contar con dos condiciones iniciales. Supongamos que al tiempo $t = 0$ el campo de deformaciones y su derivada tienen ciertos valores. Esto es:

$$\psi(x, y, t = 0) = f(x, y), \quad (3.77)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = g(x, y). \quad (3.78)$$

En resumen, el problema que buscamos resolver es la ecuación de onda con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales siguientes:

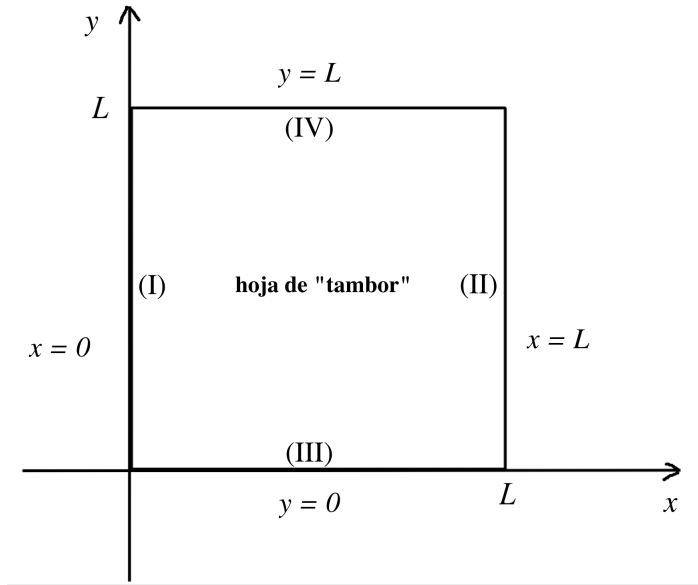


Figura 3.3: Hoja de tambor cuadrada. Las líneas (I), (II), (III) y (IV) corresponden al contorno de la hoja de tambor, los cuales están fijos (la deformación es nula en todo momento).

Ecuación de onda 2D con condiciones de frontera tipo Dirichlet

$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera $\begin{aligned} \psi(0, y, t) &= 0, & \psi(L, y, t) &= 0 \\ \psi(x, 0, t) &= 0, & \psi(x, L, t) &= 0 \end{aligned}$	Condiciones iniciales $\begin{aligned} \psi(x, y, t=0) &= f(x, y) \\ \partial_t \psi(x, y, t=0) &= g(x, y) \end{aligned}$
---	---	--

Apliquemos, ahora, el método de separación de variables a este problema. Comencemos escribiendo la ecuación de onda 2D usando derivadas parciales explícitas en lugar del operador laplaciano. La ecuación de onda 2D se escribe, entonces, como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (3.79)$$

Con base en la hipótesis de separación en la ecuación anterior, que nos indica que debemos escribir la función $\psi(x, y, t)$ como un producto de funciones $\psi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, obtenemos:

$$YT \frac{d^2 X}{dx^2} + XT \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{XY}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad (3.80)$$

y al dividir toda la expresión anterior entre XYT resulta

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (3.81)$$

En este punto, podemos ver ya que el miembro derecho de la ecuación anterior depende solo de la variable temporal, mientras que el miembro izquierdo solo depende de las variables espaciales. La igualdad entre estas funciones que dependen de variables independientes implica que dichas funciones han de ser constantes. De esta manera, obtenemos que la primera ecuación separada es para la función $T(t)$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda c^2 T. \quad (3.82)$$

Además, obtenemos una ecuación para las funciones X y Y que aún debemos separar:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda. \quad (3.83)$$

Si pasamos el término, que incluye a la segunda derivada de Y , a la derecha de la igualdad, nos queda:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}, \quad (3.84)$$

y, nuevamente, podemos ver que tanto el miembro izquierdo como el derecho dependen de variables independientes, por lo que cada expresión debe ser constante. Llamando μ a dicha constante obtenemos las siguientes ecuaciones separadas:

$$\lambda - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \mu, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = (\lambda - \mu)Y \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \mu, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = \mu X. \quad (3.86)$$

Ya hemos visto que la elección adecuada para las constantes de separación son los valores negativos, pues estos conducen a soluciones en términos de exponenciales imaginarias (o funciones senos y cosenos), lo que permite satisfacer las condiciones de frontera. Si escribimos $\mu = -k_x^2$ y $\lambda - \mu = -k_y^2$, entonces, podemos ver que:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 Y, \quad \Rightarrow \quad X(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x). \quad (3.87)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 X, \quad \Rightarrow \quad Y(y) = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y). \quad (3.88)$$

Puesto que tenemos que $\psi(x, y, t)$ satisface las condiciones de frontera:

$$\psi(0, y, t) = \psi(L, y, t) = 0, \quad (3.89)$$

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, L, t) = 0, \quad (3.90)$$

es claro que las funciones X y Y satisfacen, en consecuencia, las condiciones de frontera siguientes:

$$X(0) = X(L) = 0, \quad (3.91)$$

$$Y(0) = Y(L) = 0. \quad (3.92)$$

De la condición para X tenemos que:

$$X(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad (3.93)$$

y que

$$X(0) = B \sin(k_x L), \quad \Rightarrow \quad k_x = \frac{n\pi}{L} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}. \quad (3.94)$$

De esta manera, nuestro conjunto de soluciones para la función $X(x)$ es:

$$X_n(x) = A_n \sin(k_n x), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \quad (3.95)$$

donde hemos denotado por $k_n = n\pi/L$ los valores permitidos para la constante k_x .

Por otro lado, para la función $Y(y)$ tenemos una situación completamente análoga. Debido a que la función $Y(y)$ debe anularse en los extremos $y = 0$ y $y = L$, y puesto que tenemos que la forma de la solución $Y(y)$ es idéntica a la función $X(x)$, es claro que la constante k_y debe tomar múltiplos enteros de π/L , es decir,

$$k_y = k_m := \frac{m\pi}{L} \quad \text{para } m \in \mathbb{N}. \quad (3.96)$$

En este caso, el valor de m es independiente de n , puesto que k_x y k_y son constantes (relacionadas con las constantes de separación) independientes.

Entonces, tenemos que el conjunto de soluciones para $Y(y)$ viene dado por:

$$Y_m(x) = D_m \sin(k_m y), \quad \text{para } m \in \mathbb{N}_0. \quad (3.97)$$

Pasemos ahora a obtener las soluciones para la parte temporal de la solución $T(t)$. De acuerdo con lo anterior, esta función satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda c^2 T. \quad (3.98)$$

Recordemos que las constantes de separación λ y μ se relacionan con k_x y k_y como sigue: $\mu = -k_x^2$ y $\lambda - \mu = -k_y^2$. De lo anterior se obtiene que $\lambda = -k_x^2 - k_y^2$. Puesto que los valores de k_x y k_y están restringidos a múltiplos enteros de π/L y $2\pi/L$, entonces, tenemos que los valores de λ están restringidos a $\lambda = -k_{n,m}^2$, donde $k_{n,m}^2 := k_n^2 + k_m^2$. De manera que la ecuación para $T(t)$ se puede escribir como:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega_{n,m}^2 T, \quad (3.99)$$

donde hemos definido $\omega_{n,m} := k_{n,m}c$. Es claro que las soluciones de esta última ecuación son exponenciales imaginarias, que se pueden escribir en términos de senos y cosenos,

$$T_{n,m}(t) = \tilde{F}_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + \tilde{G}_m \sin(\omega_{n,m}t), \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \text{ y } m \in \mathbb{Z}. \quad (3.100)$$

Entonces, usando las funciones X_n , Y_m y $T_{n,m}$, dadas en la ecuaciones (3.95), (3.97) y (3.100) respectivamente, podemos escribir la solución general como una combinación lineal de este conjunto de funciones:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\tilde{F}_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + \tilde{G}_m \sin(\omega_{n,m}t) \right) \left(A_n \sin(k_n x) \right) \left(D_m \sin(k_m y) \right). \quad (3.101)$$

Si denotamos por $F_{n,m} := \tilde{F}_{n,m} A_n D_m$ y $G_m := \tilde{G}_m A_n D_m$ como nuevas constantes de integración, podemos ver que:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(F_{n,m} \cos(\omega_{n,m}t) + G_{n,m} \sin(\omega_{n,m}t) \right) \sin(k_n x) \sin(k_m y). \quad (3.102)$$

Una vez que contamos con la solución general como desarrollo de las funciones propias del operador, podemos obtener las constantes de integración $F_{n,m}$ y $G_{n,m}$ (los coeficiente del desarrollo) usando las propiedades de ortogonalidad. Recordando que las condiciones iniciales [Ecs. (3.77) y (3.77)] son $\psi(x, y, t = 0) = f(x, y)$ y $\partial_t \psi(x, y, t = 0) = g(x, y)$,

$$\psi(x, y, t = 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_{n,m} \sin(k_n x) \sin(k_m y) = f(x, y), \quad (3.103)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} \omega_{n,m} \sin(k_n x) \sin(k_m y) = g(x, y). \quad (3.104)$$

Los coeficientes del desarrollo se pueden obtener a partir de las relaciones de ortogonalidad que se desprenden del hecho de que las funciones $\sin(k_n x)$ y $\sin(k_y y)$ se obtienen como soluciones de un problema tipo Sturm-Liouville. De hecho no es difícil mostrar por integración directa que:

$$\int_0^L \sin(k_{n'} x) \sin(k_n x) dx = \frac{L}{2} \delta_{n',n}, \quad (3.105)$$

$$\int_0^L \sin(k_{m'} y) \sin(k_m y) dy = \frac{L}{2} \delta_{m',m}. \quad (3.106)$$

Entonces, los coeficientes $F_{n,m}$ y $G_{n,m}$ se pueden obtener si multiplicamos las igualdades (3.103) y (3.104) por $\sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x)$ e integramos de cero a L . Haciendo esto obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_{n,m} \int_0^L \int_0^L \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) \sin(k_nx) \sin(k_my) dx dy \\ = \int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} \omega_{n,m} \int_0^L \int_0^L \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) \sin(k_nx) \sin(k_mx) dx dy \\ = \int_0^L \int_0^L g(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \end{aligned} \quad (3.108)$$

y usando las relaciones de ortogonalidad nos queda, entonces, que:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_{n,m} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \delta_{n',n} \delta_{m',m}, = \int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \quad (3.109)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} \omega_{n,m} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \delta_{n',n} \delta_{m',m}, = \int_0^L \int_0^L g(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \quad (3.110)$$

lo que, de hecho, resulta en,

$$F_{n',m'} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \quad (3.111)$$

$$G_{n',m'} = \left(\frac{2}{L}\right)^2 \frac{1}{\omega_{n',m'}} \int_0^L \int_0^L g(x, y) \sin(k_{n'}x) \sin(k_{m'}x) dx dy, \quad (3.112)$$

que son las expresiones que buscábamos para los coeficientes del desarrollo.

Resumen de solución		
Ecuación de onda 2D con condiciones de frontera tipo Dirichlet		
$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera $\psi(0, y, t) = 0, \quad \psi(L, y, t) = 0$ $\psi(x, 0, t) = 0, \quad \psi(x, L, t) = 0$	Condiciones iniciales $\psi(x, y, t = 0) = f(x, y)$ $\partial_t \psi(x, y, t = 0) = g(x, y)$
$k_n := \frac{n\pi}{L}, \quad k_m := \frac{m\pi}{L}, \quad \omega_{n,m}^2 := (k_n^2 + k_m^2) c^2, \quad \text{para } n, m \in \mathbb{N}.$		
$\psi(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(k_n x) \sin(k_m y) \left[F_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + G_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t) \right], \quad (3.113)$		
$F_{n,m} = \left(\frac{2}{L} \right)^2 \int_0^L \int_0^L f(x, y) \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx dy, \quad (3.114)$		
$G_{n,m} = \left(\frac{2}{L} \right)^2 \frac{1}{\omega_{n,m}} \int_0^L \int_0^L g(x, y) \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx dy. \quad (3.115)$		

Ejemplo 3.1.2. Como ejemplo de cálculo de la solución en serie vamos a calcular los coeficientes $F_{n,m}$ y $G_{n,m}$ para el caso particular de las siguientes condiciones iniciales:

$$f(x, y) = x(L - x), \quad y \quad g(x, y) = 0. \quad (3.116)$$

Esto significa que

$$\psi(x, y, t = 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_{n,m} \sin(k_n x) \sin(k_m x) = x(L - x), \quad (3.117)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} \omega_{n,m} \sin(k_n x) \sin(k_m y) = 0. \quad (3.118)$$

No es difícil darse cuenta de que los coeficientes $G_{n,m}$ son todos idénticos a cero, por la igualdad que tenemos arriba. Así que lo único que hay que hacer es calcular los coeficientes $F_{n,m}$, para lo cual tenemos que calcular la integral:

$$F_{n,m} = \frac{2}{L^2} \int_0^L \int_0^L \sin(k_n x) e^{ik_m y} x(L - x) dx dy. \quad (3.119)$$

Podemos ver claramente que la integración a lo largo de y es muy sencilla, ya que nos da:

$$\int_0^L e^{ik_m y} dy = L \delta_{0,m}. \quad (3.120)$$

Así, nos queda que

$$\begin{aligned}
F_{n,m} &= \frac{2\delta_{0,m}}{L} \int_0^L \sin(k_n x) x(L-x) dx \\
&= \frac{2\delta_{0,m}}{L} \left[x(L-x) \left(-\frac{1}{k_n} \cos(k_n x) \right) \Big|_0^L - \int_0^L (L-2x) \left(-\frac{1}{k_n} \cos(k_n x) \right) dx \right] \\
&= \frac{2\delta_{0,m}}{L} \left[\frac{1}{k_n} \int_0^L (L-2x) \cos(k_n x) dx \right] \\
&= \frac{2\delta_{0,m}}{L k_n} \left[(L-2x) \left(\frac{1}{k_n} \sin(k_n x) \right) \Big|_0^L - \int_0^L (-2) \left(\frac{1}{k_n} \sin(k_n x) \right) dx \right] \\
&= -\frac{4\delta_{0,m}}{L k_n^3} \cos(k_n x) \Big|_0^L, \tag{3.121}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la técnica de integración por partes dos veces. Entonces, recordando que $k_n = n\pi/L$, podemos ver que el coeficiente $F_{n,m}$ está dado por:

$$F_{n,m} = \frac{4L^2 \delta_{0,m}}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n). \tag{3.122}$$

En conclusión, tenemos que la solución a nuestro problema inicial es:

$$\begin{aligned}
\psi(x, y, t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) \sin(k_n x) e^{ik_m y} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{4L^2 \delta_{0,m}}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \right) \cos(\omega_{n,m} t) \sin(k_n x) e^{ik_m y} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{4L^2}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \right) \cos(\omega_{n,0} t) \sin(k_n x). \tag{3.123}
\end{aligned}$$

O bien, notando que los términos pares se eliminan de la suma, obtenemos:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8L^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos(\omega_{2n+1,0} t) \sin(k_{2n+1} x). \tag{3.124}$$

Ahora, para completar este ejemplo, procederemos a evaluar la función $\psi(x, y, t)$ con una elección específica de los parámetros. Tomaremos $L = 1$, $c = 1$ y sumaremos 200 términos de la serie [3.124](#). Para esta evaluación, se escribió un código en Python con el objetivo de llevar a cabo todos los cálculos numéricos involucrados. En la figura [3.4](#), podemos apreciar una gráfica de la deformación de la hoja de tambor cuadrada a tres tiempos diferentes: a

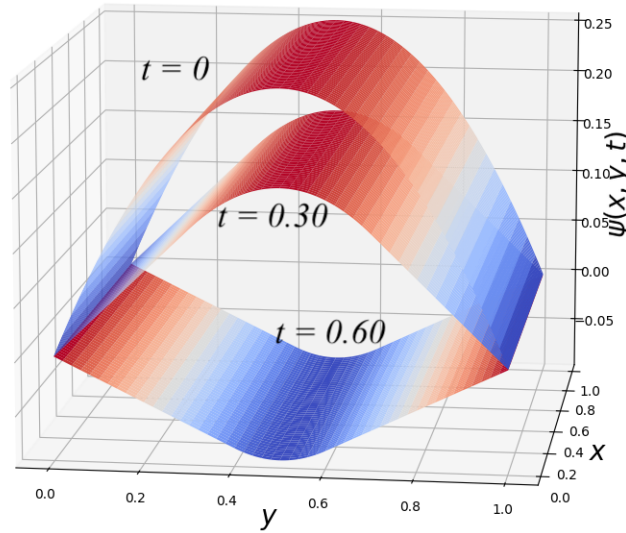


Figura 3.4: Hoja de tambor cuadrada evolucionando en el tiempo. En la figura se muestran tres gráficas sobrepuestas. La primera corresponde al campo de deformaciones $\psi(x, y, t)$ dado por la ecuación 3.124 al tiempo inicial. La segunda corresponde al mismo campo de deformaciones pero evaluado al tiempo $t = 0.3$, mientras que la tercera, de igual manera que las anteriores, pero al tiempo $t = 0.6$.

$t = 0$, a $t = 0.3$ y a $t = 0.6$. Podemos ver cómo, al tiempo inicial, la deformación tiene una forma de parábola invertida, lo que, de hecho, es así por la elección de la condición inicial $f(x, y) = x(L - x)$, que tiene la forma de parábola en el eje x , pero en el eje y es constante. Es de esperarse que la evolución en el tiempo de la deformación de la hoja sea similar a la condición inicial, es decir, que se preserve la forma de parábola a lo largo del eje x . Eso lo podemos constatar directamente en la gráfica mostrada en la figura mencionada, ya que las deformaciones posteriores tienen la misma forma parabólica que la condición inicial, pero con amplitud diferente.

3.2. Otras ecuaciones de la física

Exploremos, ahora, otras ecuaciones de la física para las que, aunque describen fenómenos físicos completamente diferentes, obtenemos soluciones como desarrollos en serie bastante similares. Los casos que exploraremos tienen que ver con fenómenos de difusión de partículas *brownianas*.

3.2.1. La ecuación de difusión 1D

El fenómeno de difusión ha sido estudiado por largo tiempo y, dentro de la física estadística, es un proceso básico en la descripción de fenómenos fuera de equilibrio. Esta ecuación es de mucha importancia en diferentes áreas de la física, así como en sus múltiples aplicaciones.

Supongamos que una partícula, que se mueve de acuerdo con el régimen browniano, como las que conforman algún colorante que se disuelve en agua, se le permite desplazarse al interior de una región unidimensional, digamos $[0, L]$. Cuando tenemos un colectivo muy grande de estas minúsculas partículas, estas se pueden describir mediante el concepto de *distribución* o una densidad de masa cuando se admite la descripción de dichas partículas como un continuo en una escala apropiada. La ecuación que rige la evolución de dicha densidad, la que denotaremos por $\rho(x, t)$, viene dada por la ecuación de difusión unidimensional, la cual se escribe como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (3.125)$$

siendo D una constante denominada *coeficiente de difusión*. Podemos notar, inmediatamente, que esta ecuación es de tipo parabólico y de primer orden en la variable de tiempo. Por esta razón, es necesario poner una condición inicial. Para el problema que nos concierne, podemos suponer que, al tiempo inicial, nuestras partículas se hallan distribuidas en el intervalo considerado, de acuerdo con una función que denotaremos por $f(x)$, esto es:

$$\rho(x, t = 0) = f(x), \quad (3.126)$$

para x intervalo $[0, L]$. Adicionalmente, necesitamos imponer condiciones en la frontera. Dado que las partículas se encuentran restringidas a moverse en el espacio unidimensional $[0, L]$, es necesario imponer condiciones de Neumann o Dirichlet en los bordes del intervalo. Si suponemos que las partículas chocan en los extremos como si fueran colisiones elásticas, entonces, la densidad de partículas sería tal que su derivada debería ser cero. Esto es

porque el gradiente de partículas en la dirección perpendicular a la pared y evaluada justo en la pared, $\partial_x \rho(x)|_{x=0,L}$, debe ser nula. Esto se debe a que $\partial_x \rho(x)$ es proporcional al *flujo* de partículas que atraviesan el punto en el que se evalúa. Entonces, podemos imponer las condiciones de frontera siguientes:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0, \quad (3.127)$$

condición que indica que no hay flujo de partículas ni al interior ni al exterior del sistema.

Ecuación de difusión 1D con condiciones de frontera tipo Neumann		
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$	Condiciones de frontera $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right _{x=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right _{x=L} = 0,$	Condición inicial $\rho(x, t=0) = f(x)$

Nuestro objetivo es resolver esta ecuación por medio del método de separación de variables. Por esta razón, vamos a introducir la hipótesis de separación en la siguiente forma $\rho(x, t) = X(x)T(t)$, siendo X y T dos funciones por determinar. Sustituyendo la hipótesis de separación en la ecuación (3.125) obtenemos:

$$X(x) \frac{dT}{dt} = DT(t) \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (3.128)$$

No es sorpresa que seguiremos los pasos que ya hemos dado para resolver ecuaciones anteriores. Vamos, primero, a dividir entre DXT ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\frac{1}{DT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad (3.129)$$

a partir de lo cual podemos aplicar, inmediatamente, el argumento de la separación, ya que cada miembro de la ecuación (3.129) solo depende de una sola variable, es claro que deben ser iguales a un valor constante. Denotando dicho valor por λ (la constante de separación), tenemos que:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda DT(t), \quad (3.130)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X. \quad (3.131)$$

Como ya hemos visto en ejemplos anteriores, estas ecuaciones se pueden resolver de manera directa obteniendo:

$$T(t) = Ce^{\lambda Dt}, \quad (3.132)$$

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad (3.133)$$

siendo C_1 , C_2 y C constantes de integración. Como sabemos, debemos buscar ahora los valores permitidos para la constante de separación imponiendo las condiciones de frontera. No es difícil darse cuenta de que las condiciones [3.127](#) se pueden trasladar a la función $X(x)$ como sigue:

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (3.134)$$

Como hemos argumentado en problemas anteriores, para que la función $X(x)$ sea compatible con las condiciones de frontera anteriores, es necesario tomar valores de λ negativos. De no ser así, será imposible satisfacer las condiciones de frontera. Esta restricción de λ nos conduce a exponenciales imaginarias como soluciones para $X(x)$. Si hacemos $\lambda = -k^2$ con $k \in \mathbb{R}$, es claro que la solución para $X(x)$ puede escribirse en términos de funciones senos y cosenos:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (3.135)$$

Ahora, imponiendo las condiciones [\(3.134\)](#) sobre esta nueva forma de la familia de posibles soluciones, obtenemos:

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = -Ak \sin(0) + Bk \cos(0) = 0, \quad (3.136)$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = -Ak \sin(kL) + Bk \cos(kL) = 0. \quad (3.137)$$

De las expresiones anteriores, se puede apreciar inmediatamente que $B = 0$ para satisfacer la primera igualdad, mientras que la segunda se puede satisfacer si $\sin(kL) = 0$. Entonces, podemos ver que los valores permitidos de k se encuentran en un conjunto discreto, infinitamente numerable, dado por:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (3.138)$$

con $n \in \mathbb{N}_0$. Con esto tenemos que el conjunto de soluciones para $X(x)$ viene dado por:

$$X_n(x) = \cos(k_n x). \quad (3.139)$$

Ahora, para obtener la solución explícita para la parte temporal, solo hay que escribir λ en términos de k_n , lo que de hecho es simplemente $\lambda = -k_n^2$, lo cual nos da para la solución $T(t)$ la siguiente familia de funciones:

$$T_n(t) = C_n e^{-Dk_n^2 t}, \quad (3.140)$$

siendo C_n constantes de integración que se han de fijar con la condición inicial.

Ahora ya tenemos todo para construir la solución buscada. Como el producto de funciones $X_n(x)T_n(t)$ es solución de la ecuación (3.125) y satisface las condiciones de frontera (3.127), para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces, cualquier combinación lineal de dichas funciones también es solución de la ecuación (3.125). De manera que la solución más general se escribe:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) e^{-Dk_n^2 t}. \quad (3.141)$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo C_n , vamos a hacer uso de la propiedad de ortogonalidad de las funciones. Por la teoría de Sturm-Liouville, sabemos bien que las funciones $\cos(k_n x)$ son ortogonales con función de peso $w = 1$, es decir, satisfacen la relación:

$$\int_0^L \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (3.142)$$

o bien, explícitamente

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (3.143)$$

siendo N_n^2 la norma de dichas funciones. No es difícil mostrar que:

$$N_n^2 = \begin{cases} L & \text{si } n = 0, \\ \frac{L}{2} & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad (3.144)$$

Ahora, usando la propiedad de ortogonalidad vamos a obtener los coeficientes C_n como lo hemos hecho anteriormente. Evaluaremos, primero, la solución general (3.141) en $t = 0$, que debe ser igual a la condición inicial establecida en (3.174), lo cual resulta en la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(k_n x) = f(x). \quad (3.145)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por la función $\cos(k_m x)$, con $m \in \mathbb{N}_0$, e integramos de 0 a L , tendremos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^L \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx = M \int_0^L \cos(k_m x) f(x) dx. \quad (3.146)$$

Lo que implica que el coeficiente C_n se puede escribir como:

$$C_n = \frac{1}{N_n^2} \int_0^L \cos(k_m x) f(x) dx. \quad (3.147)$$

Resumen de solución		
Ecuación de difusión 1D con condiciones de frontera tipo Neumann		
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$	Condiciones de frontera $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right _{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right _{x=L} = 0,$	Condición inicial $\rho(x, t=0) = f(x)$
$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(k_n x) e^{-D k_n^2 t},$		
$C_n = \frac{1}{N_n^2} \int_0^L \cos(k_m x) f(x) dx,$		
$k_n := \frac{n\pi}{L}, \quad N_n^2 = \begin{cases} L & \text{si } n = 0, \\ \frac{L}{2} & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0.$		

Ejemplo 3.2.1. Para el problema que nos concierne ahora, podemos suponer que, al tiempo inicial, todas nuestras partículas se hallan en algún punto x_0 del intervalo en cuestión. En este caso, la densidad $\rho(x, t)$ al tiempo cero puede modelarse como una delta de Dirac en el punto x_0 , esto es:

$$\rho(x, t=0) = f(x) = M \delta(x - x_0), \quad (3.148)$$

siendo M el número inicial de partículas en el sistema y x_0 algún punto en el intervalo $(0, L)$.

Resolviendo las integrales involucradas podemos ver inmediatamente que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n N_n^2 \delta_{n,m} = M \cos(k_m x_0), \quad (3.149)$$

de lo cual se desprende, por las propiedades de la delta, que:

$$C_m = \frac{M}{N_n^2} \cos(k_m x_0), \quad (3.150)$$

que es el m -ésimo coeficiente del desarrollo. Así tenemos, entonces, que la solución buscada se puede escribir como:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{N_n^2} \cos(k_n x_0) \cos(k_n x) e^{-Dk_n^2 t}. \quad (3.151)$$

En la figura 3.5, se muestra una gráfica de la solución al problema de difusión en una dimensión. A un tiempo cercano a cero podemos ver que la solución es una campana muy delgada y elevada, saliendo incluso del rango del eje vertical. Conforme el tiempo avanza, podemos apreciar cómo la función comienza a ensancharse y a disminuir su altura, de modo que todo el tiempo se preserva el área bajo la curva. Lo anterior, de hecho, es una propiedad importante de esta solución, debido a que la función como tal denota una densidad física. Una densidad física se caracteriza por interpretarse como la cantidad de materia que se encuentra esparcida en el espacio, formando un continuo, de modo que al integrarse se debe obtener la totalidad de materia presente en el sistema. Se supone que el sistema bajo estudio debe preservar la materia, por lo que, en este caso la solución debe satisfacer la condición:

$$\int_0^L \rho(x, t) dx = M, \quad (3.152)$$

para todo tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.

3.2.2. La ecuación de difusión 1D con arrastre

A continuación, exploraremos un problema que, de cierta forma, difiere en la resolución de la ecuación en derivadas parciales de cómo lo hemos hecho hasta el momento. La diferencia sustancial, matemáticamente hablando, es que, al obtener las ecuaciones separadas, no obtenemos un problema en la forma Sturm-Liouville. Es decir, la separación de variable no garantiza que las ecuaciones diferenciales ordinarias separadas, que resultan de aplicar esta metodología, tengan la forma autoconjugada, como veremos a continuación. Para ilustrar esta posibilidad vamos a resolver un problema similar al que hemos resuelto, es decir, la ecuación de difusión, pero con un término denominado *de arrastre*. Esto quiere decir que, desde un punto de vista físico, vamos a resolver la ecuación de difusión unidimensional tal como lo hicimos en la Sección 3.2.2, pero suponiendo que las partículas se ven *arrastradas* en una dirección particular por una fuerza provocada por algún gradiente físico, a la que

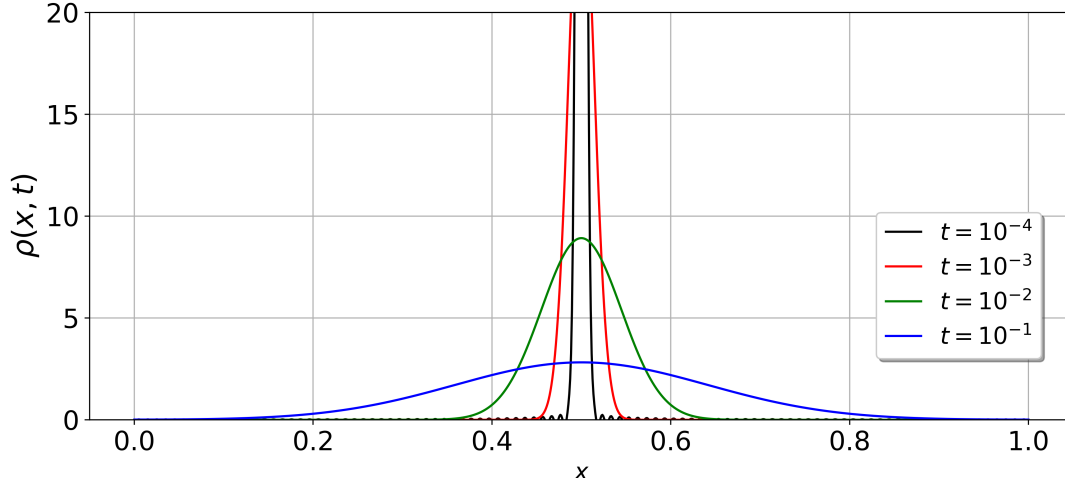


Figura 3.5: Evolución en el tiempo de la densidad de probabilidad (solución de la ecuación de difusión unidimensional). A un tiempo cercano a cero, podemos ver que la solución es una campana muy delgada y elevada. Conforme el tiempo avanza, podemos apreciar el ensanchamiento de la función y su altura disminuida, de modo que todo el tiempo se preserva el área bajo la curva.

denominaremos *fuerza de arrastre*. Esto puede significar, por ejemplo, que hemos tomado en cuenta la fuerza de gravedad que arrastra las partículas al fondo de un recipiente, al considerar un problema de difusión de partículas en el que la dirección en la cual actúa la gravedad es importante. Esta ecuación diferencial se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -J \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (3.153)$$

siendo D una constante denominada *coeficiente de difusión* como en el problema anterior, siendo, además, J la constante de arrastre (o fuerza de arrastre). Podemos notar, inmediatamente, que esta ecuación es de tipo parabólico y de primer orden en la variable de tiempo. Por esta razón, es necesario poner solo una condición inicial. Podemos suponer que, al tiempo inicial, las partículas se hallan distribuidas en el intervalo $[0, L]$ de acuerdo con una función dada $f(x)$, esto es:

$$\rho(x, t = 0) = f(x). \quad (3.154)$$

Ahora vamos a imponer las condiciones en la frontera. En este caso, es necesario suponer que las partículas se mueven en el intervalo, pero identificando los puntos extremos, 0 y L , como uno mismo, es decir, debemos imaginar que las partículas se mueven en un

anillo de longitud L , en lugar de en una línea recta. Este cambio con respecto al problema anterior obedece al hecho de que las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (3.127) son incompatibles con el problema de arrastre. El lector puede convencerse de que esto es así intentando resolver el problema planteado con esas condiciones en la frontera. Las condiciones que, en cambio, tomaremos aquí se hacen llamar *condiciones periódicas en la frontera*, como ya lo hemos visto anteriormente. En este caso, la condición en la frontera se escribe como:

$$\rho(x, t) = \rho(x + L, t). \quad (3.155)$$

para todo $x \in [0, L)$.

Ecuación de difusión 1D con condiciones de frontera periódicas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -J \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

$$\text{Condiciones de frontera} \\ \rho(x, t) = \rho(x + L, t)$$

$$\text{Condición inicial} \\ \rho(x, t = 0) = f(x)$$

Nuestro objetivo es resolver la ecuación (3.153) por medio del método de separación de variables. Por esta razón, vamos a introducir la hipótesis de separación en la siguiente forma $\rho(x, t) = X(x)T(t)$ siendo X y T dos funciones por determinar. Sustituyendo la hipótesis de separación en la ecuación (3.153) obtenemos:

$$X(x) \frac{dT}{dt} = -JT(t) \frac{dX}{dx} + DT(t) \frac{d^2 X}{dx^2}. \quad (3.156)$$

No es sorpresa que debemos seguir los mismos pasos que ya hemos dado al resolver ecuaciones anteriores. Vamos primero a dividir entre XT ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{J}{X} \frac{dX}{dx} + \frac{D}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad (3.157)$$

a partir de lo cual podemos aplicar, inmediatamente, el argumento de la separación: ya que cada miembro de la ecuación (3.129) solo depende de una sola variable, es claro que deben ser iguales a un valor constante. Denotando dicho valor por λ (la constante de separación) tenemos que:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T(t), \quad (3.158)$$

$$-J \frac{dX}{dx} + D \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda X. \quad (3.159)$$

Ya hemos visto de ejemplos anteriores que, por lo menos, la ecuación para $T(t)$ tiene una solución directa en términos de exponenciales, es decir,

$$T(t) = Ce^{\lambda Dt}, \quad (3.160)$$

siendo C una constante, por demás arbitraria, de integración. La ecuación para $X(x)$, incluso, es también soluble en términos de funciones exponenciales, esto es:

$$X_\lambda(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, \quad (3.161)$$

siendo C_1 , C_2 y C constantes de integración y α un valor que resulta ser la solución de la ecuación algebraica de segundo grado siguiente:

$$-J\alpha + D\alpha^2 = \lambda. \quad (3.162)$$

Una vez que conocemos las soluciones de las ecuaciones separadas, debemos buscar los valores permitidos para la constante de separación imponiendo las condiciones de frontera. No es difícil darse cuenta de que las condiciones [3.127](#) se pueden trasladar a la función $X(x)$ como sigue:

$$X(x) = X(x + L). \quad (3.163)$$

Como hemos argumentado en problemas anteriores, para que la función $X(x)$ sea compatible con las condiciones de frontera anteriores, es necesario tomar valores de λ convenientes. De no ser así, será imposible satisfacer las condiciones de frontera.

Ya sabemos, por los ejemplos que hemos trabajado hasta ahora, que, la única forma de satisfacer las condiciones de frontera, es necesario que las soluciones para $X(x)$ sean exponenciales imaginarias, o bien, funciones seno y/o coseno. Para que esto sea posible, es indispensable elegir los valores de la constante de separación a través de la constante λ . Debemos notar que α es un valor que está en función de λ , pero también queda clara la dependencia inversa: dado un valor de α , automáticamente, se obtiene un valor correspondiente para λ . Si hacemos $\alpha = ik$, con $k \in \mathbb{R}$, es decir, si escogemos α puramente imaginario, tenemos que la solución para $X(x)$ puede escribirse en términos exponenciales imaginarias, algo que es compatible con el hecho de que buscamos soluciones periódicas. Tenemos, entonces, que:

$$X(x) = Ae^{ikx}, \quad (3.164)$$

con $k \in \mathbb{R}$. Nótese que no hemos incluido, en la solución anterior, la exponencial con k negativa porque las hemos incluido implícitamente en la familia de soluciones al considerar todos los posible valores de k , tanto positivos como negativos.

Ahora podemos imponer las condiciones (3.134) sobre esta nueva forma de la familia de posibles soluciones, obteniendo:

$$Ae^{ikx} = Ae^{ik(x+L)}, \quad \rightarrow \quad e^{ikL} = 1. \quad (3.165)$$

De la expresión anterior, se puede apreciar inmediatamente que, para satisfacer la última igualdad, es necesario que la constante k tome valores como múltiplos enteros de $2\pi/L$, es decir:

$$k = k_n = \frac{2n\pi}{L}, \quad (3.166)$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Con esto, tenemos que el conjunto de soluciones para $X(x)$ viene dado por:

$$X_n(x) = Ae^{ik_n x} = Ae^{2\pi i n x / L}. \quad (3.167)$$

Debemos observar que el hecho de incluir los valores de n en todo $\mathbb{Z}$ es, precisamente, para considerar las soluciones exponenciales con argumento negativo dentro de la familia de soluciones. Así, cuando construyamos la solución general como una combinación lineal de la familia de soluciones, deberemos hacer sumas que corran en todo $\mathbb{Z}$.

Ahora, para obtener la solución explícita para la parte temporal, solo hay que escribir la constante de separación λ en términos de k_n . Si hacemos uso de la relación entre λ y α de la identidad (3.162) y recordamos que la constante α fue seleccionada como $\alpha = ik$, obtenemos inmediatamente que $\lambda = -iJk_n - Dk_n^2$. Esta expresión para λ nos arroja la familia de soluciones para $T(t)$ dadas por:

$$T_n(t) = D_n e^{-iJk_n t - Dk_n^2 t}, \quad (3.168)$$

siendo D_n constantes de integración que se han de fijar con la condición inicial.

Una vez que tenemos las soluciones para X y para T podemos construir la solución general y, a partir de ahí, resolver el problema propuesto. Sin embargo, a partir de este punto, todos los cálculos subsecuentes son idénticos al caso anterior, como veremos a continuación. La solución general se escribe como:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ik_n x - iJk_n t - Dk_n^2 t}. \quad (3.169)$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo C_n , haremos uso de la propiedad de ortogonalidad de las funciones. Al igual que en el problema de difusión sin arrastre, las soluciones para $X(x)$ satisfacen la regla de ortogonalidad, es decir:

$$\int_0^L e^{-ik_n x} e^{ik_m x} = L \delta_{n,m}. \quad (3.170)$$

Ahora, mediante la propiedad de ortogonalidad, obtendremos los coeficientes C_n como lo hemos hecho anteriormente. Evaluaremos, primero, la solución general (3.169) en $t = 0$, que debe ser igual a la condición inicial establecida en (3.154), lo cual resulta en la siguiente identidad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ik_n x} = f(x). \quad (3.171)$$

Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por la función $\cos(k_m x)$, con $m \in \mathbb{N}_0$, e integramos de 0 a L , tendremos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_0^L e^{ik_n x} e^{-ik_m x} dx = \int_0^L e^{-ik_m x} f(x) dx. \quad (3.172)$$

Lo anterior implica que el coeficiente C_n se puede obtener resolviendo la siguiente integral:

$$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-ik_n x} dx. \quad (3.173)$$

Resumen de solución		
Ecuación de difusión 1D con condiciones de frontera periódicas		
$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -J \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$	Condiciones de frontera $\rho(x, t) = \rho(x + L, t)$	Condición inicial $\rho(x, t = 0) = f(x)$
$\rho(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp (ik_n x - iJk_n t - Dk_n^2 t) .$		
$C_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-ik_n x} dx, \quad k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$		

Ejemplo 3.2.2. Al igual que en el caso de la ecuación de difusión sin arrastre, podemos suponer que, al tiempo inicial, todas nuestras partículas se hallan en algún punto x_0 del intervalo en cuestión. En este caso, la densidad $\rho(x, t)$ al tiempo cero puede modelarse como una delta de Dirac en el punto x_0 , esto es,

$$\rho(x, t = 0) = f(x) = M\delta(x - x_0), \quad (3.174)$$

siendo M el número inicial de partículas en el sistema y x_0 algún punto en el intervalo $(0, L)$.

Resolviendo la integral (3.173) podemos ver que:

$$C_m = \frac{M}{L} e^{ik_m x_0}, \quad (3.175)$$

resultado que se obtiene directamente por las propiedades de la delta de Dirac. Así, tenemos que la solución buscada se puede escribir como:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ik_n(x-x_0) - iJk_n t - Dk_n^2 t}. \quad (3.176)$$

Hay que notar que la expresión anterior está en términos de exponenciales imaginarias, sin embargo, la solución que buscamos (la función $\rho(x, t)$) debe ser real, debido a que la función $\rho(x, t)$ es una cantidad física que no debe contener componentes imaginarias. Lo anterior quiere decir que, de alguna forma, debemos garantizar que la solución hallada es una función puramente real. No es difícil notar que, cuando tomamos el complejo conjugado de la ecuación (3.176) obtenemos:

$$(\rho(x, t))^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-ik_n(x-x_0) + iJk_n t - Dk_n^2 t}. \quad (3.177)$$

Ya que $k_n = 2\pi n/L$, entonces, queda claro que al invertir el orden de la suma, obtenemos la expresión original. Esto se debe al hecho de que la suma se está haciendo sobre $n \in \mathbb{Z}$, por lo que un cambio global de signo en la variable n deja inalterada la suma. Lo anterior quiere decir que la función $\rho(x, t)$ es puramente real. Este hecho nos lleva a una forma alternativa para expresar la solución sin necesidad de exponenciales imaginarias. Si consideramos solo la parte real de las exponenciales imaginarias dentro de la suma, estaremos tomando la parte real de la función $\rho(x, t)$, de modo que:

$$\rho(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos(k_n(x - x_0) - Jk_n t) e^{-Dk_n^2 t}. \quad (3.178)$$

En la figura 3.6, se muestra una gráfica de la solución al problema de difusión en una dimensión. A un tiempo cercano a cero, podemos ver que la solución es una campana muy delgada y elevada, saliendo incluso del rango del eje vertical. Conforme el tiempo avanza, podemos apreciar cómo la función comienza a ensancharse y a disminuir su altura, de modo que todo el tiempo se preserva el área bajo la curva. A diferencia del problema de difusión sin arrastre, apreciamos cómo la campana se mueve a la derecha conforme avanza el tiempo, lo que muestra el desplazamiento de las partículas como un colectivo. Al igual que en el problema de difusión sin arrastre, una propiedad importante de esta solución es el hecho de que el área bajo la curva permanece constante en el tiempo, debido

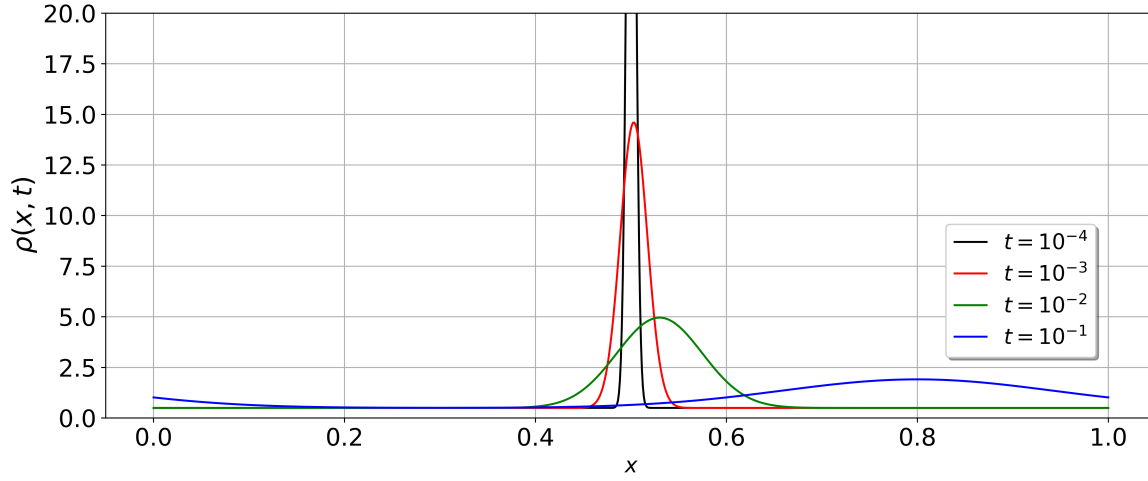


Figura 3.6: Evolución en el tiempo de la densidad de probabilidad (solución de la ecuación de difusión unidimensional). A un tiempo cercano a cero, podemos ver que la solución es una campana muy delgada y elevada. Conforme el tiempo avanza, podemos apreciar el ensanchamiento de la función y su altura disminuida, de modo que todo el tiempo se preserva el área bajo la curva. A diferencia del problema de difusión sin arrastre, podemos observar cómo la campana se mueve a la derecha conforme avanza el tiempo, lo que muestra el desplazamiento de las partículas como un colectivo.

a que la función como tal denota una densidad física. Una densidad física se caracteriza por interpretarse como la cantidad de materia que se encuentra esparcida en el espacio, formado un continuo, de modo que al integrarse se debe obtener la totalidad de materia presente en el sistema. Se supone que el sistema bajo estudio debe preservar la materia, por lo que, en este caso, la solución debe satisfacer la condición:

$$\int_0^L \rho(x, t) dx = M, \quad (3.179)$$

para todo tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.

3.3. Ejercicios

1. Demuestra por integración directa que

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (3.180)$$

donde N_n^2 está dada por,

$$N_n^2 = \begin{cases} L & \text{si } n = 0, \\ \frac{L}{2} & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (3.181)$$

2. Demuestra por integración directa que

$$\int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_{n'} x) dx = \frac{L}{2} \delta_{n,n'}, \quad (3.182)$$

siendo $k_n = n\pi/L$.

3. Demuestra por integración directa que la función

$$\rho(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{N_n^2} \cos(k_n x_0) \cos(k_n x) e^{-Dk_n^2 t}, \quad (3.183)$$

satisface la propiedad

$$\int_0^L \rho(x, t) dx = M,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$. En este caso, $k_n = n\pi/L$ y la constante N_n^2 vale L cuando $n = 0$ y vale $L/2$ si $n > 0$.

4. Las oscilaciones de una hoja de tambor cuadrada se pueden describir mediante una función $\psi(x, y, t)$ que satisface la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.184)$$

para $(x, y) \in [0, L]^2 \subset \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Queremos saber cómo son las oscilaciones $\psi(x, y, t)$ si la hoja de tambor satisface las siguientes condiciones de frontera

$$\psi(0, y, t) = \psi(L, y, t) = 0, \quad (\text{los extremos son fijos en el eje } x) \quad (3.185)$$

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, L, t), \quad (\text{condiciones periódicas en el eje } y) \quad (3.186)$$

y con las condiciones iniciales

$$\psi(x, y, t = 0) = 0, \quad (3.187)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = \delta(x - 1/2)\delta(y - 1/2). \quad (3.188)$$

Resuelve la ecuación de onda con las condiciones establecidas usando el método de separación de variables.

5. Resuelve nuevamente la ecuación en derivadas parciales del ejercicio anterior (ejercicio 4), pero

i. con las condiciones iniciales:

$$\psi(x, y, t = 0) = x(x - L)y^2, \quad (3.189)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = 0, \quad (3.190)$$

ii. y con las condiciones iniciales:

$$\psi(x, y, t = 0) = y(y - L), \quad (3.191)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = x(x - L). \quad (3.192)$$

6. La ecuación de difusión de calor en un dominio cuadrado $[0, L]^2 \subset \mathbb{R}$ es descrita mediante la función perfil de temperaturas $T(x, y, t)$ que satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.193)$$

donde α es la difusividad térmica.

Las condiciones en la frontera para este problema son:

$$T(0, y, t) = T(L, y, t), \quad (\text{condiciones periódicas en la variable } x),$$

$$T(x, 0, t) = T_1, \quad \text{y} \quad T(x, L, t) = T_2 \quad (\text{condiciones fijas en la variable } y),$$

con la condición inicial

$$T(x, t = 0) = T_0. \quad (3.194)$$

7. Considera la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.195)$$

para $(x, y) \in [0, L]^2 \subset \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Resuelve la ecuación anterior con las siguientes condiciones de frontera (mixtas)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, & (\text{condiciones de Neumann en la variable } x), \\ \psi(x, 0, t) &= \psi(x, L, t), & (\text{condiciones periódicas en la variable } y),\end{aligned}$$

y con las condiciones iniciales

$$\psi(x, y, t = 0) = 0, \quad (3.196)$$

$$\partial_t \psi(x, y, t = 0) = y. \quad (3.197)$$

Resuelve la ecuación de onda con las condiciones establecidas usando el método de separación de variables.

8. Considera la ecuación de difusión de partículas 1D:

$$D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.198)$$

siendo D la constante de difusión y con la variable x contenida en el intervalo $[0, L]$. Considere, además, las condiciones de frontera siguientes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \rho(x = L, t) = 0, \quad (3.199)$$

esto es, la función $\rho(x, t)$ satisface la condición de frontera tipo Neumann en el extremo $x = 0$ y la condición de tipo Dirichlet en el extremo $x = L$. Esto quiere decir que las partículas que se difunden en el intervalo $[0, L]$ rebotan en el extremo $x = 0$ (pared reflejante en $x = 0$), pero en el extremo $x = L$ pueden salir, pues dicho punto es *absorbente* por la condición $\rho(x = L, t) = 0$.

Resuelve el problema planteado con la condición inicial

$$\rho(x, t = 0) = \delta(x - x_0),$$

para un $x_0 \in (0, L)$. Una vez obtenida la solución muestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = 0,$$

es decir, todas las partículas terminan escapando del intervalo en cuestión a tiempo infinito. Escribe un programa en Python mostrando la evolución en el tiempo de la densidad $\rho(x, t)$.

9. Considera ahora la ecuación de difusión de partículas 2D:

$$D\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.200)$$

siendo D la constante de difusión y con las variables x contenidas en el dominio cuadrado, esto es, la caja cuadrada $[0, L] \times [0, L]$. Considere, además, las condiciones de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0, & \text{para } 0 \leq y \leq L, & \quad \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y=0} &= 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right|_{y=L} &= 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L, & \quad \rho(x = L, y, t) &= 0, & \text{para } 0 \leq y \leq L, \end{aligned}$$

esto es, la función $\rho(x, y, t)$ satisface una condición de frontera tipo Neumann en las paredes izquierda ($x = 0$), inferior ($y = 0$) y superior ($y = L$) de la caja $[0, L] \times [0, L]$ (i.e., son paredes reflejantes), mientras que la densidad de partículas satisface una condición de tipo Dirichlet en la pared del extremo derecho, $x = L$ (i.e., es una pared absorbente).

Resuelve el problema planteado con la condición inicial

$$\rho(x, y, t = 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

donde (x_0, y_0) es un punto en el interior de la caja, es decir, $0 < x_0 < L$ y $0 < y_0 < L$. Una vez obtenida la solución muestra que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, y, t) = 0,$$

es decir, todas las partículas terminan escapando del intervalo en cuestión a tiempo infinito. Escribe un programa en Python mostrando la evolución en el tiempo de la densidad $\rho(x, y, t)$.

Capítulo 4

Funciones cilíndricas

Este capítulo tiene un propósito doble: por una parte, se utiliza la técnica de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales en 2D escritas en coordenadas polares y, por otro lado, se pretende introducir una familia de funciones que aparecen comúnmente en problemas con geometría cilíndrica (o circular).

Comenzaremos con el problema de resolver la ecuación de onda en 2D en un dominio circular, y veremos cómo este nos conduce a la definición de las funciones de Bessel. Vamos a presentar toda una familia de funciones involucradas en este problema como las funciones de Hankel o las funciones de Bessel modificadas. Una vez que se establezcan las propiedades generales de estas funciones procederemos a resolver completamente el problema de la ecuación de onda haciendo uso de las funciones cilíndricas. Trataremos, igualmente, otra clase de problemas similares en los que las soluciones se pueden expresar en términos de las funciones presentadas, como el problema de la ecuación de conducción de calor en dos dimensiones con geometría circular o anular o la ecuación de difusión con coeficiente de difusión variable.

4.1. Separación de variables II

4.1.1. La ecuación de onda 2D en coordenadas polares

Consideremos la ecuación de onda en 2D en coordenadas polares. Esta ecuación diferencial la podemos interpretar como aquella que rige las deformaciones elásticas de algún material, digamos, la hoja de un tambor. Si denotamos por $\psi(\mathbf{r}, t)$ el campo de las deformaciones

de la hoja de tambor, entonces, la ecuación que debe satisfacer $\psi(\mathbf{r}, t)$ es:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Como $\psi(\mathbf{r}, t)$ describe el campo de deformaciones de la hoja de tambor en cada punto de la hoja de tambor, es claro que la variable espacial $\mathbf{r}$ está limitada a la geometría del material. Como se supone que una hoja de tambor sea circular, digamos con un radio de tamaño a , entonces, buscamos resolver la ecuación de onda (4.1) en el disco de radio a

$$\{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| \leq a\},$$

y en particular buscamos que en la periferia la hoja de tambor esté fija (de otro modo, no tendríamos un tambor). De este modo podemos ver que el campo de deformaciones $\psi(\mathbf{r}, t)$ debe satisfacer la condición

$$\psi(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=a} = 0, \quad (4.2)$$

que es lo que denominamos *condición de frontera* para nuestro problema (4.1). Además de la condición inicial, para tener una solución única, se deben imponer dos condiciones iniciales (por tener una derivada segunda temporal). Es decir, al tiempo inicial, la hoja de tambor puede tener una deformación inicial así como un campo de “velocidades” inicial que provoquen asimismo que la hoja cambie su forma continuamente en el tiempo. Si denotamos por $f(\mathbf{r})$ el campo de deformaciones inicial y por $g(\mathbf{r})$ el campo de “velocidades” inicial, entonces, tenemos que $\psi(\mathbf{r}, t)$ debe también satisfacer las condiciones

$$\psi(\mathbf{r}, t=0) = f(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = g(\mathbf{r}). \quad (4.3)$$

Si ahora escribimos $\mathbf{r}$ en coordenadas polares, (r, ϕ) , siendo r la coordenada radial y ϕ el ángulo polar, podemos ver la ecuación que rige la dinámica de $\psi(r, \phi, t)$ viene dada por

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (4.4)$$

De acuerdo con la hipótesis de la separación de variables, podemos suponer que la función $\psi(r, \phi, t)$ se puede escribir como un producto de funciones de la forma $\psi(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$, lo que al introducirse en la ecuación (4.4) nos da como resultado lo siguiente

$$\frac{\Phi T}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{RT}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \frac{\Phi R}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

Ahora, como las funciones R , Φ y T dependen de una sola variable, es claro que podemos escribir las derivadas parciales como derivadas totales, de modo que la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$\frac{\Phi T}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{RT}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{\Phi R}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (4.6)$$

Si ahora dividimos la igualdad anterior entre $R\Phi T$, obtenemos que

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (4.7)$$

De acuerdo con el método de separación de variables, podemos argumentar que en la expresión (4.7), el miembro derecho de la ecuación depende únicamente de la variable T , mientras que el miembro izquierdo depende únicamente de las variables r y ϕ , de modo que la única forma de satisfacer dicha igualdad es haciendo ambos lados de la igualdad igual a una constante. Esta constante la denotaremos por λ y será la primera constante de separación que aparece en nuestro problema. Con esta argumentación obtenemos dos ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{1}{r} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda. \quad (4.9)$$

Si tomamos la ecuación (4.8) y multiplicamos cada término por r^2 , obtenemos

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = r^2 \lambda \quad (4.10)$$

de lo cual se obtiene que

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - r^2 \lambda = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \quad (4.11)$$

De nueva cuenta, podemos apreciar que el miembro izquierdo de la ecuación anterior solo depende de la variable radial r mientras que el miembro derecho solo depende del ángulo azimutal. Como ambas variables son independientes, entonces, la única forma de satisfacer la igualdad es haciendo que ambos miembros de la ecuación sean iguales a una constante. Esta constante la denotaremos por ν^2 y será nuestra segunda constante de separación. Esta forma de escoger la constante de separación la justificaremos más adelante. Entonces, obtenemos el par de ecuaciones separadas,

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - r^2 \lambda = \nu^2, \quad (4.12)$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \nu^2. \quad (4.13)$$

Reacomodando algunos términos, podemos ver que las tres ecuaciones separadas que resultan de aplicar la hipótesis de separación de variables a la ecuación de onda (4.1) pueden escribirse como

Ecuaciones separadas de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k^2 c^2 T = 0, \quad (4.16)$$

en donde hemos reescrito la constante de separación λ como $\lambda = -k^2$, en analogía con los problemas que hemos resuelto en coordenadas cartesianas. Más adelante justificaremos esta elección cuando se exponga la solución completa a este problema.

Una vez que se tienen las ecuaciones separadas, el siguiente paso es obtener las correspondientes soluciones. No es difícil darse cuenta de que las ecuaciones (4.270) y (4.220) pueden resolverse directamente, pues se trata de ecuaciones cuyas soluciones son exponenciales, reales o imaginarias, dependiendo del signo de las constantes de separación. No obstante, la ecuación (4.218) no cae dentro de una categoría conocida cuyas soluciones puedan escribirse en términos de funciones elementales. De hecho, la ecuación (4.218) es una ecuación conocida como *ecuación de Bessel* que, a continuación, vamos a explorar.

4.1.2. La ecuación de Bessel

Consideremos la ecuación para la parte radial de la ecuación de onda que obtuvimos anteriormente,

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \nu^2) R(r) = 0. \quad (4.17)$$

Como ya lo hemos mencionado, esta ecuación diferencial no la identificamos con alguna forma conocida que nos arroje soluciones en términos de funciones elementales. Por esa

razón, vamos a simplificar la ecuación diferencial escribiéndola en términos de una variable adimensional para tener, en algún sentido, un problema puramente matemático. Si definimos la variable $x = kr$ ¹ podemos ver que la ecuación (4.17) puede reescribirse como

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + (x^2 - \nu^2)u(x) = 0, \quad (4.18)$$

en donde hemos denotado por $u(x)$ la función $u(x) = u(kr) = R(r)$. En su forma estándar, tenemos que ecuación puede escribirse como

Ecuación de Bessel $x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - \nu^2)u(x) = 0. \quad (4.19)$	
--	--

Vamos ahora aplicar el método de Frobenius para obtener una expresión para la solución como un desarrollo en serie de potencias. Notemos que la ecuación diferencial tiene como factor x^2 en la segunda derivada de la función incógnita. Esto significa que la solución de la ecuación de Bessel (4.19) podría no ser regular en el origen. Esto quiere decir que, si buscamos una solución en la forma de un desarrollo en serie de potencias, tendremos que incluir una potencia de x cuyo valor obtendremos más adelante. En este sentido, tenemos que proponer que la solución a la ecuación (4.19) sea de la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+s} \quad (4.20)$$

siendo $s \in \mathbb{R}$ una constante real por determinar. Es claro que la primera y segunda derivadas de $u(x)$ pueden escribirse como

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s) x^{k+s-1}, \quad u''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}. \quad (4.21)$$

Al sustituir en la ecuación de Bessel estos desarrollos en serie, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+s) x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 - \nu^2) c_k x^{k+s} = 0, \quad (4.22)$$

¹Si recordamos la ecuación de onda en coordenadas cartesianas, la constante de separación la identificamos con el *vector de onda* de una onda que se desplaza en el espacio. Esta cantidad tiene unidades de longitud inversa, de modo que la combinación kr es adimensional.

lo cual puede escribirse alternativamente como

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+s)x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+s+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+s} = 0. \quad (4.23)$$

Para poder obtener una relación de recurrencia para los coeficientes del desarrollo es necesario emparejar las potencias de cada serie que aparece en la igualdad anterior. Podemos notar que el tercer término (de izquierda a derecha) es una serie cuya potencia va como x^{k+s+2} . Para emparejar esta potencia con el resto, hay que correr los índices, lo que se logra definiendo el índice de sumación $j = k + 2$, lo que implica que dicha serie, al correr sobre j comienza en $j = 2$, pues cuando $k = 0$ $j = 2$. Entonces tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+s+2} = \sum_{j=2}^{\infty} c_{j-2} x^{j+s}.$$

Como el índice j es una variable muda, la podemos renombrar como k , con lo cual queda claro que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+s+2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^{k+s}.$$

Con este cambio tenemos, entonces, que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+s)x^{k+s} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+s} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+s} = 0. \quad (4.24)$$

Ahora, para colocar cada término de la ecuación anterior en una sola serie, necesitamos que todas las series comiencen en un valor común. Esto se logra si de las series que no empiezan en $k = 2$ extraemos los términos $k = 0$ y $k = 1$. Este es el caso del segundo y cuarto términos de la igualdad anterior. Podemos ver fácilmente que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+s)(k+s-1)x^{k+s} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(k+s)x^{k+s} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^{k+s} - \sum_{k=0}^{\infty} \nu^2 c_k x^{k+s} \\ & + c_0 s(s-1)x^s + c_1 s(1+s)x^{1+s} + c_0 s x^s + c_1(1+s)x^{1+s} - \nu^2 c_0 x^s - \nu^2 c_1 x^{1+s} = 0. \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes y agrupando las series en una sola suma, tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} \left([(k+s)(k+s-1) + (k+s) - \nu^2] c_k + c_{k-2} \right) x^{k+s} \\ & + c_0 [s(s-1) + s - \nu^2] x^s + c_1 [s(1+s) + (1+s) - \nu^2] x^{1+s} = 0, \end{aligned}$$

lo cual puede reescribirse como

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left([(k+s)^2 - \nu^2] c_k + c_{k-2} \right) x^{k+s} + c_0 [s^2 - \nu^2] x^s + c_1 [(1+s)^2 - \nu^2] x^{1+s} = 0.$$

De la igualdad anterior podemos apreciar que, por independencia lineal, los coeficientes del desarrollo son todos idénticos a cero para satisfacer la igualdad. Entonces, tenemos tres ecuaciones para los coeficientes,

$$[(k+s)^2 - \nu^2] c_k + c_{k-2} = 0, \quad (4.25)$$

$$c_0 [s^2 - \nu^2] = 0, \quad (4.26)$$

$$c_1 [(1+s)^2 - \nu^2] = 0. \quad (4.27)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse por lo menos de dos maneras diferentes, debido a que las últimas dos igualdades no son independientes. Una posibilidad consiste en tomar $c_1 = 0$ y $s = \pm\nu$, mientras que la otra es hacer $c_0 = 0$ y tomar $1+s = \pm\nu$. Estas dos posibles elecciones, junto con la relación de recurrencia

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+s)^2 - \nu^2}, \quad (4.28)$$

nos brindan sendas soluciones para los coeficientes del desarrollo y, en consecuencia, de la ecuación diferencial cuya solución buscamos. Más adelante veremos que las dos formas de resolver el problema conducen exactamente a la misma solución. Vamos, entonces, a suponer que $c_1 = 0$ y $s = \pm|\nu|$. En este caso podemos ver claramente que los coeficientes c_k satisfacen la relación de recurrencia

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+\nu)^2 - \nu^2}, \quad (4.29)$$

o bien

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \quad (4.30)$$

en donde hemos omitido el signo $\pm$ enfrente de $|\nu|$ bajo el supuesto de que ν puede ser cualquier valor real, i.e., $\nu \in \mathbb{R}$.

A partir de la expresión anterior podemos darnos cuenta de que, debido a que $c_1 = 0$, entonces, todos los coeficientes impares son cero. Los únicos que son finitos no nulos son los pares, mismos que se pueden extraer directamente resolviendo la ecuación de recurrencia (4.30).

Vamos a iterar unas cuantas veces la relación de recurrencia (4.30). Para este propósito notemos que si escribimos $2k$ en lugar de k (pues sabemos que los coeficientes diferentes

de cero son aquellos para lo que k es par), la ecuación de recurrencia (4.30) se transforma en

$$c_{2k} = \frac{(-1)}{(2k)(2k+2\nu)} c_{2k-2} = \frac{(-1)}{2^2 k(k+\nu)} c_{2k-2}. \quad (4.31)$$

Por comodidad vamos a renombrar los coeficientes c_{2k} por a_k , de modo que $c_{2k} = a_k$ y $c_{2k-2} = c_{2(k-1)} = a_{k-1}$. Con esto tenemos que la relación de recurrencia (4.31) se puede reescribir como

$$a_k = \frac{(-1)}{2^2 k(k+\nu)} a_{k-1}. \quad (4.32)$$

Iterando unas cuantas veces esta última recurrencia, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(-1)}{2^2 k(k+\nu)} c_{k-1} \\ &= \left(\frac{(-1)}{2^2 k(k+\nu)} \right) \left(\frac{(-1)}{2^2 (k-1)((k-1)+\nu)} \right) a_{k-2} \\ &= \left(\frac{(-1)}{2^2 k(k+\nu)} \right) \left(\frac{(-1)}{2^2 (k-1)((k-1)+\nu)} \right) \left(\frac{(-1)}{2^2 (k-2)((k-2)+\nu)} \right) a_{k-3}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando un razonamiento inductivo, podemos darnos cuenta de que el coeficiente a_k puede escribirse entonces como

$$a_k = \frac{(-1)^k \nu!}{2^{2k} k!(k+\nu)!} a_0, \quad (4.34)$$

donde a_0 es una constante de integración. Para obtener este último resultado hemos hecho uso de la identidad

$$\frac{(k+\nu)!}{\nu!} = (k+\nu)(k+\nu-1)(k+\nu-2) \dots (1+\nu),$$

la que se puede obtener fácilmente de la relación de recurrencia $z! = z(z-1)!$.

Escribiendo esta expresión en términos de los coeficientes c_k , es claro que

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k \nu!}{2^{2k} k!(k+\nu)!} c_0. \quad (4.35)$$

Veamos ahora qué sucede cuando optamos por adoptar la otra solución, esto es, si hacemos que $1+s = \nu$, o bien, $s = \nu - 1$ ². En este caso tenemos que

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{(k+\nu-1)^2 - \nu^2} = -\frac{c_{k-2}}{(k-1)(k-1+2\nu)}. \quad (4.36)$$

²Nótese que hemos eliminado el signo $\pm$ enfrente de ν , bajo la condición de que $\nu \in \mathbb{R}$.

Si escribimos $j = k - 1$, podemos darnos cuenta de que

$$c_{j+1} = -\frac{c_{j-1}}{j(j+2\nu)}, \quad (4.37)$$

la cual es la misma relación de recurrencia que (4.30), lo que muestra que las elecciones $c_1 = 0$ con $s = \pm\nu$, y $c_0 = 0$ junto con $1 + s = \pm\nu$, nos dan exactamente los mismos coeficientes.

Entonces, podemos quedarnos con la expresión $s = \nu$, tomando la variable ν en los reales (esto sustituye escribir explícitamente el signo $\pm$ que se obtiene al tomar la raíz), y haciendo la constante de integración $c_0 = 2^\nu/\nu!$, los coeficientes adoptan la forma

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!}. \quad (4.38)$$

Esto implica que las soluciones de la ecuación de Bessel (4.19) vienen dadas por la expresión

Función de Bessel de primer tipo $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (4.39)$	
--	--

funciones que se conocen como las funciones de Bessel de primer tipo. En lo que sigue, vamos a explorar las propiedades de esta clase de funciones y desarrollaremos expresiones alternativas para $J_\nu(x)$, con la finalidad de comprender mejor el comportamiento de dichas funciones.

4.2. Funciones de Bessel

4.2.1. Funciones de Bessel de primer tipo

Con el cálculo que hemos hecho hasta ahora, podemos ver que una solución a la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (x^2 - \nu^2)u(x) = 0, \quad (4.40)$$

es la función de Bessel de primer tipo $J_\nu(x)$, cuyo desarrollo en serie hemos obtenido a través del método de Frobenius, esto es,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (4.41)$$

Una de las cosas que es importante tener presente es el hecho de que una ecuación diferencial tiene necesariamente dos soluciones linealmente independientes. Hasta ahora hemos visto que el método de Frobenius nos arroja únicamente la expresión anterior. En realidad, la expresión hallada para $J_\nu(x)$ nos brinda las dos soluciones buscadas. Primero, recordemos que la variable ν es una constante de separación, un valor fijo real. Como la variable s del método de Frobenius debe ser $\pm\nu$, tenemos que las dos soluciones linealmente independientes de (4.40) deberían ser, entonces, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$. Para mostrar que este es el caso, recordemos que el wronskiano $W(u, v) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$ de dos soluciones $u(x), v(x)$ linealmente de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad (4.42)$$

esta dado por

$$W(x) = \exp\left(-\int b(x)dx\right). \quad (4.43)$$

Ahora, si tomamos dos soluciones u y v que satisfacen la ecuación de Bessel, podemos ver que el papel de $b(x)$ es $b(x) = 1/x$, lo que implica que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \implies W(x) = e^{-(\ln(x)+C)} = \frac{A}{x}, \quad (4.44)$$

siendo $A = e^{-C}$ una constante de integración.

Ahora vamos a mostrar que $W(J_\nu, J_{-\nu}) = -2\sin(\pi\nu)/\pi x$. Para este fin, debemos notar que el wronskiano es proporcional a x^{-1} . Esto quiere decir que, si hacemos uso del desarrollo en serie de potencias de $J_{\pm\nu}$, solo contribuirán los términos cruzados que arrojen como resultado una potencia de la forma x^{-1} . No es difícil convencerse de que el orden más bajo es el que logra dicho objetivo. A partir del desarrollo en serie de potencias, es fácil darse cuenta de que al orden más bajo, J_ν se escribe como

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, \quad (4.45)$$

lo que implica que

$$J_{-\nu}(x) \approx \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}(-\nu)!}, \quad (4.46)$$

y que

$$J'_\nu(x) \approx \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!} = \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!}, \quad J'_{-\nu}(x) \approx \frac{(-\nu)x^{-\nu-1}}{2^{-\nu}(-\nu)!} = \frac{x^{-\nu-1}}{2^{-\nu}(-\nu-1)!}. \quad (4.47)$$

Ahora, si usamos estas expresiones para evaluar el wronskiano, obtenemos

$$\begin{aligned} W(J_\nu, J_{-\nu}) &= J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J'_\nu(x)J_{-\nu}(x) \\ &= \left(\frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}\right) \left(\frac{x^{-\nu-1}}{2^{-\nu}(-\nu-1)!}\right) - \left(\frac{x^{\nu-1}}{2^\nu (\nu-1)!}\right) \left(\frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}(-\nu)!}\right) \\ &= \frac{x^{-1}}{\nu!(-\nu-1)!} - \frac{x^{-1}}{(-\nu)!(\nu-1)!} = \frac{(-\nu)x^{-1}}{\nu!(-\nu)!} - \frac{\nu x^{-1}}{(-\nu)! \nu!} \\ &= -\frac{2\nu x^{-1}}{\nu!(-\nu)!}. \end{aligned}$$

Si recordamos la fórmula de reflexión para la función gamma de Euler, $\Gamma(x)$, tenemos que

$$\nu!(-\nu)! = \frac{\pi \nu}{\sin(\pi \nu)} \quad (4.48)$$

lo que implica que el wronskiano $W(J_\nu, J_{-\nu})$ se puede escribir como

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{2\nu x^{-1}}{\nu!(-\nu)!} = \frac{2\nu \sin(\pi \nu)}{\pi \nu x}, \quad (4.49)$$

lo que implica que

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2 \sin(\pi \nu)}{\pi x}. \quad (4.50)$$

Este último resultado muestra dos cosas principalmente. Por una parte, podemos ver que, efectivamente, las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel, en términos de las cuales podemos construir la solución general como una combinación lineal. Por otro lado podemos ver también que, para valores enteros de ν , esto no es cierto, pues cuando $\nu = n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $\sin(\pi n) = 0$, lo cual implica que $W(J_n, J_{-n}) = 0$. Sin embargo, este resultado debe ser interpretado con más cuidado. Hay que notar que si hacemos ν igual a un entero negativo, i.e. $\nu = -n$ con $n \geq 1$, en el desarrollo en serie de $J_\nu(x)$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (4.51)$$

tenemos algunos coeficientes indefinidos (de hecho, los primeros n coeficientes). Esto es debido a que el factorial $(k-n)! = \Gamma(k-n+1)$ con $k = 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$ está

indefinido. Lo anterior significa que los primeros n términos del desarrollo de $J_\nu(x)$ con $\nu = -n$ deberían estar ausentes si tomamos el límite $\nu \rightarrow -n$. De hecho, no es difícil darse cuenta de que

$$\lim_{\nu \rightarrow -n} \frac{1}{(k + \nu)!} = 0,$$

para $k = 0, -1, -2, \dots, -(n-1)$.

A la luz de este último resultado, podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow -n} J_\nu(x) &= \lim_{\nu \rightarrow -n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k + \nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k - n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

de modo que la función de Bessel de primer tipo de orden entero negativo viene dada por

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k - n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}. \quad (4.53)$$

Vamos ahora analizar esta última expresión. Si hacemos un corrimiento de índices de la forma $s = k - n$, podemos ver que la suma corre desde $s = 0$ hasta infinito. Cambiando todo valor de k por $s + n$ en la expresión (4.53) para $J_{-n}(x)$ tenemos que

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{(s + n)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}, \quad (4.54)$$

si cambiamos la variable s por la variable k , podemos ver que

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!(k + n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad (4.55)$$

lo que implica que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (4.56)$$

Esto último muestra que, efectivamente, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son dos soluciones linealmente dependientes de la ecuación de Bessel. En lo subsecuente, vamos a investigar diversas propiedades de estas funciones de Bessel de orden entero.

4.2.2. La función generatriz de las funciones de Bessel

Consideremos la función de Bessel $J_m(x)$ con $m \in \mathbb{Z}$ y analicemos la función $G(x, t)$ definida como

$$G(x, t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m. \quad (4.57)$$

Ya sabemos que valores de m enteros, las funciones de Bessel tienen la forma

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad \text{si } m \geq 0, \quad (4.58)$$

$$J_m(x) = \sum_{k=|m|}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \quad \text{si } m < 0. \quad (4.59)$$

No es difícil ver que, usando las expresiones anteriores, la función $G(x, t)$ se puede escribir como una doble suma, en la cual se involucran potencias tanto de la variable x como la variable t . No obstante, es claro que esta doble suma tiene una sutileza: cuando la variable m es negativa, la segunda suma comienza en un valor diferente de cero, de hecho, comienza en $-m$ o, equivalentemente, en $|m|$, mientras que si m es positiva, la segunda suma comenzaría a correr desde cero. De una forma compacta, podríamos representar esta doble suma como

$$G(x, t) := \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_k' \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} t^m, \quad (4.60)$$

donde el símbolo $\sum_k'$ lo hemos puesto para indicar que dicha suma corre desde $k = 0$ hasta infinito si m es positiva, y corre desde $k = |m|$ hasta infinito si m es negativa.

Vamos ahora a realizar un cambio de índices para escribir la doble sumación de una manera alternativa. Para ello, vamos a hacer un cambio de índices, pasaremos la suma de la pareja (m, k) a la pareja (r, n) por medio de la transformación: $r = m + k$ y $n = k$. No es difícil ver que la doble suma nueva sobre (r, n) corre de 0 a ∞ sin restricciones, esto es,

$$\begin{aligned} G(x, t) &:= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_k' \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} t^m \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+r} t^{r-n}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Algunos cambios algebraicos muestran que la doble suma anterior puede escribirse como,

$$G(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!r!} \left(\frac{xt}{2}\right)^r \left(-\frac{x}{2t}\right)^n, \quad (4.62)$$

o bien separando las sumas,

$$G(x, t) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{xt}{2}\right)^r \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^n \right), \quad (4.63)$$

de donde podemos reconocer la función exponencial, lo que nos lleva a una forma sencilla de la función $G(x, t)$,

$$G(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}. \quad (4.64)$$

La función $G(x, t)$ es conocida como la función generatriz de las funciones de Bessel. Esta función es importante por varias razones. Primero, debemos observar que, de acuerdo con la definición de la función $G(x, t)$, si hacemos un desarrollo en serie de potencias al rededor de $t = 0$, los coeficientes del desarrollo están dados por las funciones de Bessel. Esto quiere decir que derivando una función elemental, $e^{(x/2)(t-1/t)}$, obtenemos las funciones especiales de Bessel de primer tipo,

Función generatriz de las funciones de Bessel

$$G(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m. \quad (4.65)$$

A continuación veremos que la función generatriz nos permite hallar relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel de orden entero, mismas que después generalizaremos para las funciones de Bessel de orden arbitrario.

4.2.3. Relaciones de recurrencia

La función generatriz de las funciones de Bessel dada por la ecuación (4.65) nos permite hallar un par de relaciones entre las funciones de Bessel, denominadas *relaciones de recurrencia*. Estas relaciones, como se verá más adelante, son de utilidad práctica para

determinar funciones de Bessel de orden superior a partir de funciones de Bessel de orden inferior, lo facilita mucho el cálculo de estas funciones.

Si tomamos la función $G(x, t)$ y derivamos parcialmente respecto a la variable x , podemos darnos cuenta de que, por un lado, se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2}(t - t^{-1})e^{(x/2)(t-1/t)} \quad (4.66)$$

mientras que la misma derivada puede expresarse equivalentemente como

$$G(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J'_m(x)t^m, \quad (4.67)$$

donde $J'_m(x)$ representa la derivada de la función $J_m(x)$ respecto de x .

Si ahora usamos el hecho de que $e^{(x/2)(t-1/t)}$ es la función generatriz en la ecuación (4.66), no es difícil observar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{1}{2}(t - t^{-1}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m, \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_m(x)t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_m(x)t^{m-1}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Estas últimas dos sumas se pueden escribir de manera alternativa si hacemos los corrimientos de índices $m = n + 1$ y $n = m - 1$ respectivamente. Este cambio de índices de sumación muestra que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_{n+1}(x)t^n. \quad (4.69)$$

Y combinando las sumas en una sola y renombrando la variable de sumación como m , obtenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x))t^m, \quad (4.70)$$

lo cual, al compararse directamente con la igualdad (4.67), es fácil ver que

$$2J'_m(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x), \quad (4.71)$$

ecuación que es la primer relación de recurrencia entre funciones de Bessel.

Una identidad similar puede obtenerse si hacemos el mismo procedimiento pero derivando respecto de la variable t . Si tomamos la derivada de $G(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)}$ respecto a t , es claro que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{x}{2}(1 + t^{-2})e^{(x/2)(t-1/t)}, \quad (4.72)$$

lo cual, con base en el hecho de que la función $e^{(x/2)(t-1/t)}$ es la función generatriz, puede escribirse como

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}(1 + t^{-2})J_m(x)t^m. \quad (4.73)$$

Haciendo un poco más de álgebra en el sumando, nos podemos dar cuenta de que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_m(x)t^m + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_m(x)t^{m-2}. \quad (4.74)$$

Ahora, para combinar las dos series que aparecen en esta última expresión, vamos a realizar dos corrimientos de índices mediante la siguiente transformación: $m = n - 1$ en la primera suma, y $n = m + 1$ en la segunda. Esto nos muestra que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_{n+1}(x)t^{n-1}, \quad (4.75)$$

lo que, de hecho, puede escribirse en una sola suma si renombramos la variable n por m ,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}(J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x))t^{m-1}. \quad (4.76)$$

Si ahora usamos el desarrollo de la función $G(x, t)$ en términos de las funciones de Bessel para calcular la derivada respecto a t , obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} mJ_m(x)t^{m-1}. \quad (4.77)$$

Comparando las ecuaciones (4.76) y (4.77) no es difícil observar que se de cumplir la siguiente identidad

$$\frac{x}{2}(J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)) = mJ_m(x), \quad (4.78)$$

lo que puede reescribirse como,

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x}J_m(x), \quad (4.79)$$

que es la segunda relación de recurrencia que se obtiene directamente de la función generatriz de las funciones de Bessel. De hecho, estas mismas relaciones de recurrencia nos ofrecen otras relaciones como se señala a continuación:

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}, \quad (4.80)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}. \quad (4.81)$$

En resumen, tenemos las siguientes relaciones de recurrencia entre funciones de Bessel:

Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$2J'_m(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x), \quad (4.82)$$

$$\frac{2m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x), \quad (4.83)$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}, \quad (4.84)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}. \quad (4.85)$$

4.2.4. Representaciones integrales

Si vemos la función generatriz $G(x, t)$ como una función de variable compleja t , entonces el desarrollo en serie

$$G(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m, \quad (4.86)$$

se puede ver como un desarrollo en serie de Laurent alrededor de $t = 0$. Esto quiere decir que, para obtener los coeficientes de dicho desarrollo, podemos emplear la fórmula integral de Cauchy. Específicamente, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en una vecindad alrededor de $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces, el desarrollo en serie de Laurent se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z - z_0)^m, \quad (4.87)$$

donde los coeficientes del desarrollo se obtienen mediante la fórmula

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds. \quad (4.88)$$

Aplicando esta fórmula al desarrollo de la ecuación (4.86), obtenemos que $J_m(x)$ puede escribirse como

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{G(x, t)}{t^{n+1}} dt, \quad (4.89)$$

donde C es un contorno que contiene al origen del plano t -complejo. Explícitamente tenemos que

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \exp\left(\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) t^{-m-1} dt, \quad (4.90)$$

expresión que es conocida como la *fórmula de Schlaefli* para la representación integral de las funciones de Bessel de orden entero.

La fórmula de Schlaefli se puede utilizar para hallar otras representaciones de las funciones de Bessel de orden entero. De hecho, si tomamos el contorno C como el círculo unitario, podemos usar la parametrización $t = e^{i\theta}$ para reescribir la integral de Schlaefli en términos de una integral de variable real. Mediante este procedimiento, no es difícil darse cuenta de que

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{x}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right) e^{-i(m+1)\theta} i e^{i\theta} d\theta, \quad (4.91)$$

lo que puede escribirse en la forma

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin(\theta) - m\theta)} d\theta. \quad (4.92)$$

Esta última representación de J_m se puede escribir alternativamente usando la identidad de Euler,

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin(\theta) - m\theta) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x \sin(\theta) - m\theta) d\theta. \quad (4.93)$$

Lo anterior, en el caso particular de $m = 0$, queda de la forma

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin(\theta)) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x \sin(\theta)) d\theta. \quad (4.94)$$

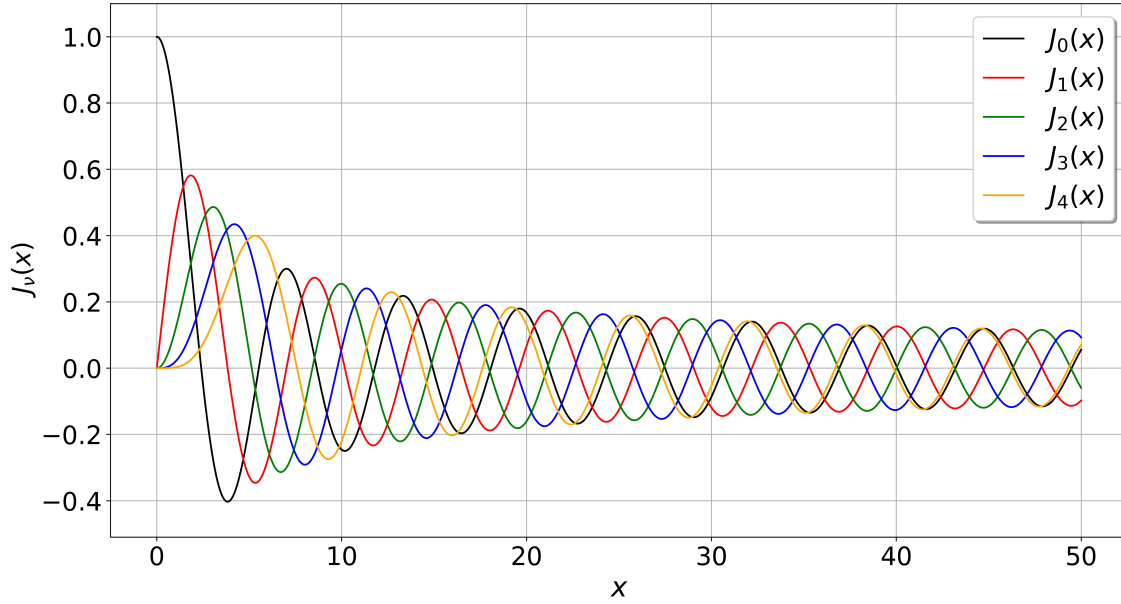


Figura 4.1: Gráficas de las funciones de Bessel. En la figura se muestran las gráficas de las primeras cinco funciones de Bessel de primer tipo de orden ν entero, correspondientes a $\nu = 0, 1, 2, 3$ y 4 . Nótese que, a excepción de $J_0(x)$, todas las demás funciones de Bessel toman el valor cero en $x = 0$.

Además, notando que la función J_0 es real, podemos simplificar aún más la expresión anterior. No es difícil probar que

$$\int_0^{2\pi} \sin(x \sin(\theta)) d\theta = 0,$$

lo que nos permite escribir J_0 como

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin(\theta)) d\theta, \quad (4.95)$$

o bien usando la paridad de la función $\cos(x \sin(\theta))$, podemos escribir

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin(\theta)) d\theta. \quad (4.96)$$

En la figura (4.1) podemos ver las gráficas de las primeras funciones de Bessel de orden entero.

Finalmente, conviene escribir la representación integral de $J_\nu(x)$ en el caso en que ν no es un entero. Debido a que la función de Bessel de orden entero $J_n(x)$ se puede escribir como

la integral de Schlaefli (4.90), podemos suponer que $J_\nu(x)$ ha de tener la misma forma, es decir,

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-\nu-1} dz. \quad (4.97)$$

En realidad, la forma de la integral es casi idéntica, con la excepción del contorno de integración. Esto se debe a que el integrando tiene un factor de la forma $z^{-\nu-1}$, lo que implica que para cada ν no entero, se tiene un corte de ramificación en la línea $\text{Re}(z) < 0$. De hecho, en este caso, el contorno de integración C_1 debe ser el que se muestra en la figura 4.2. La demostración de este resultado se puede encontrar en [5].

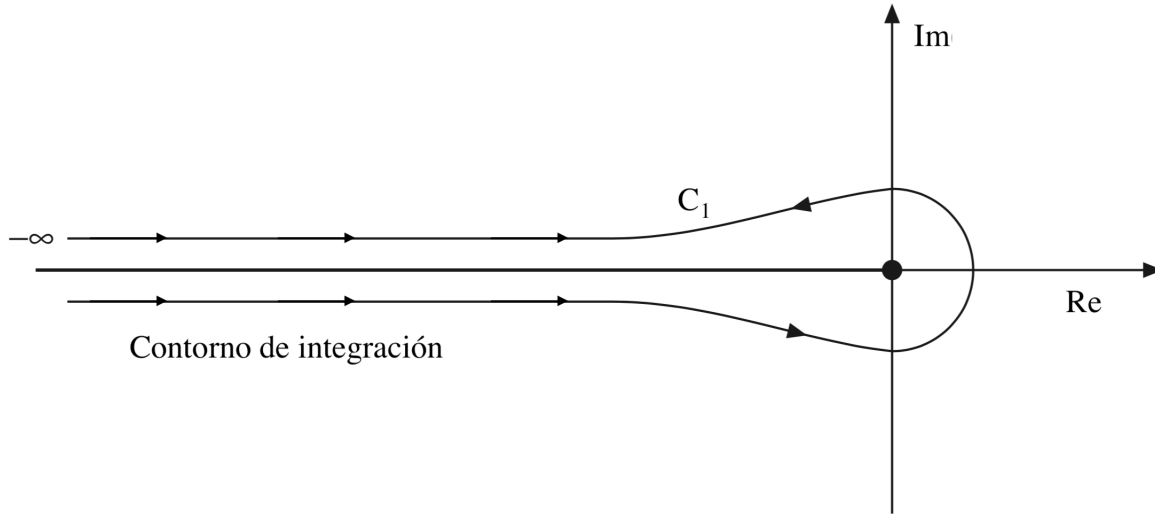


Figura 4.2: Contorno de integración para la representación integral de las funciones de Bessel de primer tipo. Este contorno rodea el origen además de rodear la recta del semi-eje real negativo, que es donde el factor $z^{-\nu-1}$, que aparece en el integrando de la representación integral de $J_\nu(x)$ en la ecuación (4.97).

Representaciones integrales de las funciones de Bessel de primer tipo

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-m-1} dz, \\ J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x \sin(\theta) - m\theta)} d\theta, \\ J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} z^{-\nu-1} dz. \end{aligned}$$

4.2.5. Ortogonalidad

Vamos ahora a explorar un tipo de ortogonalidad para las funciones de Bessel. Ya hemos visto que las funciones de Bessel se obtienen a partir de una ecuación diferencial que naturalmente tiene la forma Sturm-Liouville. Sin embargo, vamos a hacer explícito este hecho.

La ecuación de Bessel tiene la forma

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0. \quad (4.98)$$

No es difícil ver que la forma Sturm-Liouville se obtiene multiplicando por x^{-1} , con lo cual, la ecuación de Bessel puede escribirse como

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + \left(x - \frac{m^2}{x} \right) u(x) = 0. \quad (4.99)$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $x = kr$, donde k es una constante arbitraria, tenemos que

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{m^2}{r} \right) y(r) = 0, \quad (4.100)$$

donde la función $y(r)$ es tal que $y(r) = u(kr)$. Reacomodando los términos de la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) - \frac{m^2}{r} y(r) = -k^2 r y(r). \quad (4.101)$$

Esta última ecuación nos muestra con claridad que las funciones $y(r)$ son soluciones de un problema tipo Sturm-Liouville. Esto implica que, imponiendo condiciones de frontera adecuadas, podemos obtener un conjunto de funciones (las *funciones propias* del problema S-L), asociadas a un valor propio λ , que resultan ser ortogonales entre sí.

La ecuación (4.101) nos permite identificar los elementos clave para obtener la ortogonalidad. La función $p(r)$ está dada por $p(r) = r$, mientras que los valores propios λ los identificamos con $\lambda = -k^2$ (cuyos valores están por determinarse). La función de peso $w(r)$ en este caso es $w(r) = r$, la cual es indispensable para definir la ortogonalidad deseada, puesto que dadas dos funciones u y v , el producto interno está dado por

$$\langle v|u \rangle = \int_a^b v^*(r) u(r) r dr, \quad (4.102)$$

siendo a y b los extremos del intervalo en el que están definidas las soluciones de la ecuación (4.101) y en los cuales definiremos condiciones de frontera adecuadas.

La identidad de Lagrange para el caso de operadores Sturm-Liouville (cf. sección 2.2 ec. (2.68)) se escribe como

$$(\lambda - \lambda')\langle v|u \rangle = \left[p(v^*u' - (v^*)'u) \right]_a^b, \quad (4.103)$$

donde u es la función propia asociada al valor propio λ , mientras que v es la función propia asociada al valor propio λ' .

Podemos ver que, para el caso de la ecuación de Bessel, esta identidad toma la forma

$$(\lambda - \lambda') \int_a^b v(r)u(r)rdr = \left[r(v(r)u'(r) - v'(r)u(r)) \right]_a^b, \quad (4.104)$$

en la que hemos omitido la conjugación de las funciones porque las funciones de Bessel de primer tipo son reales. Ahora buscamos condiciones de contorno apropiadas para establecer la ortogonalidad de las funciones. Para esto, es necesario que el miembro derecho de la igualdad (4.104) sea nulo. Esto se puede conseguir de varias formas, como a continuación se describe.

Caso (i). Podemos hacer que el miembro derecho de la igualdad (4.104) sea cero si tomamos $a = 0$ y b arbitrario. Si escribimos a en lugar de b y 0 en lugar de a , obtenemos:

$$(\lambda - \lambda') \int_0^a v(r)u(r)rdr = \left[r(v(r)u'(r) - v'(r)u(r)) \right]_0^a. \quad (4.105)$$

Como el miembro derecho es automáticamente cero cuando lo evaluamos en 0, entonces, lo que se necesita para anular completamente esa expresión es pedir que $u(a) = v(a) = 0$ o bien $u'(a) = v'(a) = 0$. En este caso hacemos la elección

$$u(a) = 0, \quad v(a) = 0. \quad (4.106)$$

Esto es, las funciones u y v valuadas en $r = a$ deben ser cero para que sean ortogonales.

Caso (ii). Al igual que en el caso (i), escribimos a en lugar de b y 0 en lugar de a , siendo $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, lo que implica que:

$$(\lambda - \lambda') \int_0^a v(r)u(r)rdr = \left[r(v(r)u'(r) - v'(r)u(r)) \right]_0^a. \quad (4.107)$$

En este caso, elegimos que las derivadas se anulen en el extremo $r = a$, esto es,

$$u'(a) = 0, \quad v'(a) = 0. \quad (4.108)$$

Así, para satisfacer las condiciones de ortogonalidad, las funciones u' y v' valuadas en $r = a$ deben ser cero para que sean ortogonales.

Caso (iii). A diferencia de los casos anteriores, en este no vamos a suponer que el extremo inferior de nuestro intervalo sea cero, sino que supondremos que a y b son reales positivos arbitrarios, con $a > 0$. Para que se cumpla la igualdad

$$\left[r(v(r)u'(r) - v'(r)u(r)) \right]_a^b = 0, \quad (4.109)$$

hay que pedir que tanto en el extremo inferior como en el superior las funciones u y v (o sus derivadas) se anulen. En este caso pedimos que las funciones se anulen, por lo que las condiciones de ortogonalidad se escribe como

$$u(a) = 0, \quad v(a) = 0, \quad (4.110)$$

$$u(b) = 0, \quad v(b) = 0. \quad (4.111)$$

Caso (iv). Al igual que en el caso (iii), vamos a suponer que a y b son reales positivos arbitrarios, con $a > 0$. Para que se cumpla la igualdad

$$\left[r(v(r)u'(r) - v'(r)u(r)) \right]_a^b = 0, \quad (4.112)$$

hay que pedir que tanto en el extremo inferior como en el superior las derivadas de las funciones u y v se anulen. Así, las condiciones de ortogonalidad se escribe como

$$u'(a) = 0, \quad v'(a) = 0, \quad (4.113)$$

$$u'(b) = 0, \quad v'(b) = 0. \quad (4.114)$$

Hay que notar que, en los casos mencionados, las funciones u y v son funciones propias *arbitrarias* del problema Sturm-Liouville en cuestión. Esto quiere decir que las condiciones que conducen a la ortogonalidad deben ser satisfechas por *todas* las funciones propias. Los casos (i) y (ii) solo piden que las funciones propias o sus derivadas sean nulas en el extremo superior $r = a$, siempre que el extremo inferior sea el origen $r = 0$. Los casos (iii) y (iv) piden que las funciones propias o sus derivadas sean nulas en ambos extremos, siempre que el extremo inferior no sea el origen $r = 0$, es decir, que a sea estrictamente positivo.

Para ejemplificar el caso (i), vamos escribir explícitamente las soluciones del problema (4.101), que están dadas en términos de las funciones de Bessel de primer tipo como

$$y(r) = J_n(kr). \quad (4.115)$$

Ahora, como el valor de la constante k aún no está determinado, vamos a imponer la condición de ortogonalidad del caso (i). Para ello, debemos tomar la variable r en el intervalo $[0, a]$, y pedir que $y(a)$ sea cero, es decir,

$$J_n(ka) = 0 \quad (\text{condición de ortogonalidad caso (i)}). \quad (4.116)$$

Esto quiere decir que el valor de ka debe ser una raíz de la función de Bessel J_n . Como hemos visto anteriormente, esta función tiene infinitas raíces cuyos valores se pueden determinar numéricamente. Estas raíces las denotaremos como $\alpha_{n,\ell}$, lo que indicará la ℓ -ésima raíz de la función de Bessel de orden n , $J_n(x)$. A modo de ejemplo, algunas raíces de función de Bessel de orden cero, $J_0(x)$ se muestran en la figura 4.3.

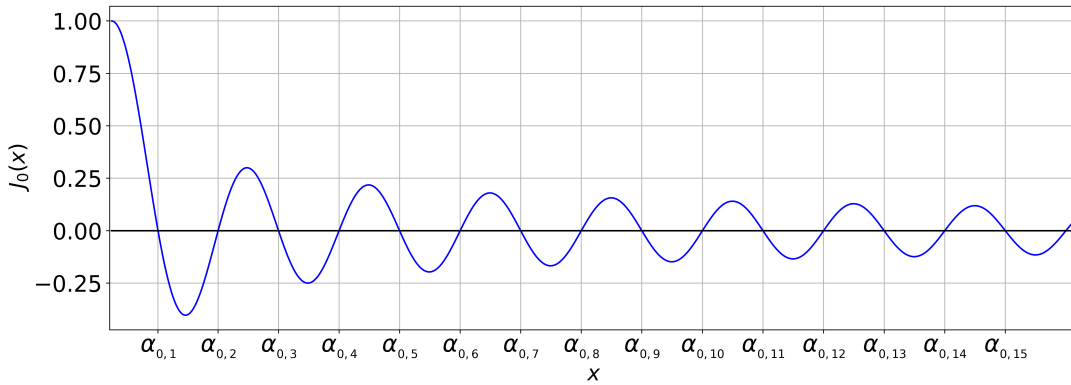


Figura 4.3: Raíces de la función de Bessel de orden cero. Las raíces de las funciones de Bessel no ocurren de forma equidistante como el caso de las funciones trigonométricas, sin embargo, cuando x tiende a infinito, las distancias entre ceros sucesivos se acercan a una constante, tal como veremos más adelante al analizar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel. Solo como referencia, tenemos que los valores aproximados de algunas de estas raíces son: $\alpha_{0,1} \approx 2.404$, $\alpha_{0,2} \approx 5.520$, $\alpha_{0,3} \approx 8.653$, $\dots$, $\alpha_{0,15} \approx 46.341$.

De lo anterior podemos decir que los valores permitidos de k , los que denotaremos como $k_{n,\ell}$, se pueden escribir como

$$k_{n,\ell}, \quad \text{para } \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.117)$$

Entonces, para un n fijo, tenemos infinitos valores permitidos para k , lo que nos lleva a infinitas funciones que satisfacen la condición de borde impuesta. Esto es, el conjunto de funciones que son ortogonales debido a la condición (4.116) está dado por

$$\{y_\ell(x) := J_n(k_{n,\ell}r) : \ell \in \mathbb{N}\}, \quad (4.118)$$

es decir, hay tantas funciones propias asociadas al valor propio $\lambda_\ell = -k_{n,\ell}^2$ como raíces de la función J_n . La relación de ortogonalidad se escribe explícitamente como sigue:

$$\int_0^a J_n(k_{n,\ell}r) J_n(k_{n,\ell'}r) r dr = N_{n,\ell}^2 \delta_{\ell,\ell'}, \quad (4.119)$$

en donde $N_{n,\ell}^2$ es una constante que se denomina *norma cuadrada* de las funciones $J_n(k_{n,\ell}r)$, la cual, de hecho, se define como

$$N_{n,\ell}^2 := \int_0^a J_n^2(k_{n,\ell}r) r dr. \quad (4.120)$$

No es difícil demostrar que la norma cuadrada de las funciones J_n se puede escribir exactamente como

$$N_{n,\ell}^2 = \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{n,\ell}). \quad (4.121)$$

Una demostración de este resultado se puede encontrar en referencia [5].

4.2.6. Funciones de Bessel de segundo tipo

En la sección anterior establecimos el hecho de que, cuando la constante ν , en la ecuación de Bessel, es un entero, no tenemos acceso a dos soluciones linealmente independientes. Aunque con ν no entero dijimos que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son auténticamente dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel, esto deja de ser cierto para $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$, pues estas funciones son idénticas hasta en un factor de $(-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Nuestro problema ahora es hallar la segunda solución que complemente a J_n . La forma en la que vamos a proceder es como sigue: vamos a proponer una solución linealmente independiente de J_ν como combinación lineal de $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ para ν no entero, y probaremos, posteriormente, que en el límite en que $\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$ sigue siendo una solución, bien definida, de la ecuación de Bessel. A esta función le daremos el nombre de *función de Neumann* o *función de Bessel de segundo tipo*.

La función de Neumann se denota por $N_\nu(x)$ ³ y se define como

$$N_\nu(x) := \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (4.122)$$

Es claro que la función $N_\nu(x)$ es linealmente independiente de $J_\nu(x)$ para ν no entero, por lo que estas funciones conforman las dos soluciones de la ecuación de Bessel.

Incluso, no es difícil probar que en el límite cuando $\nu \rightarrow n \in \mathbb{Z}$, entonces, la función $N_n(x)$ está bien definida y satisface la ecuación de Bessel para $\nu = n$ entero.

A continuación, vamos a obtener una representación en serie de la función de Neumann $N_n(x)$ de orden entero. Por definición tenemos que

$$N_n(x) := \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(x) := \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (4.123)$$

Notemos que, en el límite anterior tenemos un cociente en el que tanto el denominador como el numerador se van a cero. Esto quiere decir que el límite puede calcularse a partir de la regla de l'Hôpital, lo que nos lleva a

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\nu} [\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{\frac{d}{d\nu} \sin(\pi\nu)}, \quad (4.124)$$

³La notación moderna de la función de Bessel de segundo tipo es $Y_\nu(x)$, aunque varios autores siguen utilizando la notación $N_\nu(x)$. Esta última es la que se usará en este libro para evitar el uso de la Y que normalmente se utiliza para los armónicos esféricos. Las funciones de Bessel de segundo tipo también se suelen llamar *funciones de Weber*, quien las introdujo en 1873 [\[68\]](#), aunque al parecer Neumann las introdujo en 1867 [\[44\]](#).

y que puede escribirse como

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{-\sin(\pi\nu)J_\nu(x) + \cos(\pi\nu)\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu}}{\pi \cos(\pi\nu)}. \quad (4.125)$$

Vemos ahora que el límite resultante se puede obtener directamente evaluando en $\nu = n$. Haciendo esto y recordando que $\sin(\pi n) = 0$ y que $\cos(\pi n) = (-1)^n$, obtenemos

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - (-1)^n \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} \right] \Big|_{\nu=n}. \quad (4.126)$$

De hecho, se puede probar que esta expresión para $N_n(x)$ satisface la ecuación de Bessel.

Para apreciar mejor las propiedades de esta función, vamos a obtener un desarrollo en serie de potencias para analizar el comportamiento de la función de Neumann de orden entero.

Lo primero que tenemos que hacer para ello es calcular las correspondientes derivadas respecto de la variable ν para luego evaluar en ν entero. Comencemos con J_ν ,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} &= \frac{d}{d\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{d}{d\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k![(k+\nu)!]^2} \left(\frac{d(k+\nu)!}{d\nu}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Al notar que las derivadas que aparecen en la expresión anterior se pueden escribir como

$$\frac{1}{(k+\nu)!} \frac{d(k+\nu)!}{d\nu} = \frac{d}{d\nu} \left[\ln((k+\nu)!) \right] = \frac{d}{d\nu} \ln \left(\Gamma(k+\nu+1) \right) = \psi(k+\nu+1), \quad (4.128)$$

$$\frac{d}{d\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \ln \left(\frac{x}{2}\right), \quad (4.129)$$

obtenemos la siguiente expresión para la derivada de J_ν respecto a ν ,

$$\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} = \ln \left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

o bien, reconociendo el desarrollo de J_ν ,

$$\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} = \ln \left(\frac{x}{2}\right) J_\nu(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k+\nu+1)}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (4.130)$$

siendo, en este caso, ψ la función digamma.

Para obtener la derivada de J_ν respecto a ν solo hay que tomar la expresión anterior, cambiar ν por $-\nu$ y multiplicarla por (-1) , ya que

$$\frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} = -\frac{dJ_{-\nu}(x)}{d(-\nu)}.$$

De este modo obtenemos,

$$\frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} = -\ln\left(\frac{x}{2}\right)J_{-\nu}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k-\nu+1)}{k!(k-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (4.131)$$

El siguiente paso para obtener el desarrollo en serie de la función de Neumann de orden entero es evaluar las derivadas obtenidas en $\nu = n$. La derivada de J_ν respecto a ν es fácil de evaluar, y se obtiene

$$\left. \frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} \right|_{\nu=n} = \ln\left(\frac{x}{2}\right)J_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k+n+1)}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (4.132)$$

La derivada de $J_{-\nu}$ respecto a ν es algo distinta ya que tenemos que observar, en la serie que aparece en la ecuación (4.131), que los primeros n términos parecieran estar indeterminados al evaluar en $\nu = n$. Esto se debe a que $(k-\nu)!$ diverge cuando $\nu = n$ con $k < n$. Sin embargo, el factor $\psi(k-\nu+1)$ también diverge en el mismo caso, y de hecho, el límite del cociente entre ambos es finito. No es difícil probar, a través de la fórmula de reflexión, que

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{(k-\nu)!} = (-1)^{n-k}(n-k-1)! \quad (4.133)$$

Mediante este resultado podemos ver que, al evaluar en $\nu = n$, la derivada de $J_{-\nu}$ respecto a ν obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right|_{\nu=n} &= -\ln\left(\frac{x}{2}\right)J_{-n}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k-n+1)}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, \end{aligned} \quad (4.134)$$

lo que de hecho se puede escribir alternativamente como

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right|_{\nu=n} &= -\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-n}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \psi(k+1)}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \end{aligned} \quad (4.135)$$

en donde solo hemos hecho un corrimiento de índice en la última serie de la ecuación anterior.

Finalmente, si combinamos los desarrollos de las ecuaciones (4.132) y (4.135) obtenemos una serie para la función de Neumann de orden entero,

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi(k+n+1)}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right. \\ &+ (-1)^n \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-n}(x) - (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^n (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\left. - (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \psi(k+1)}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right]. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Esta expresión para N_n puede reducirse si hacemos un poco de álgebra, al reducir algunos factores y notar que $(-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x)$. Esto nos lleva a la siguiente representación de la función de Neumann.

Representación en serie de la función de Neumann de orden entero

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

En esta última expresión ya podemos apreciar que la segunda solución para la ecuación de Bessel, la función $N_n(x)$, diverge en $x = 0$, lo que se puede notar en el término logarítmico. Este hecho tiene algunas implicaciones. Por ejemplo, si el problema físico que estamos analizando, por alguna razón, no es admisible alguna divergencia, entonces, esta solución

se debe descartar. En otras ocasiones no será el caso. De hecho, más adelante analizaremos la ecuación de onda en un dominio anular, y veremos que tanto las funciones de Bessel como las de Neumann son indispensables para escribir la correspondiente solución. En la figura 4.4, podemos ver las primeras funciones de Neumann de orden entero.

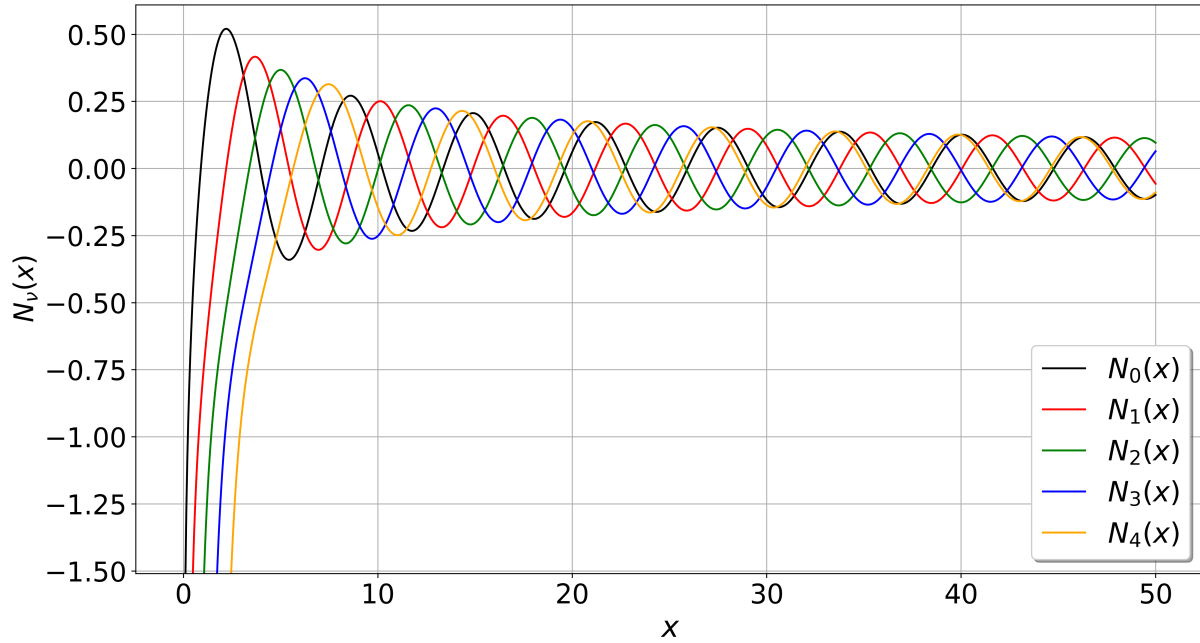


Figura 4.4: Gráficas de las funciones de Neumann. En la figura se muestran las gráficas de las primeras cinco funciones de Neumann (o funciones de Bessel de segundo tipo) de orden ν entero correspondientes a $\nu = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

Por otro lado, no es difícil darse cuenta de que las funciones de Neumann N_ν satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que J_ν . En cuanto a la representación integral, veremos más adelante, con la introducción de las funciones de Hankel, que se pueden obtener algunas representaciones de N_ν por esa vía. Para culminar esta sección, también hay que dejar indicado que la independencia lineal de las funciones de Neumann con las funciones de Bessel de primer tipo se puede explorar calculando el correspondiente wronskiano. Este cálculo es directo, pues ya conocemos el wronskiano entre J_ν y $J_{-\nu}$, que es lo único que necesitamos, pues N_ν no es más que una combinación lineal de dichas funciones.

4.2.7. Funciones de Hankel

Vamos ahora a introducir una clase de funciones directamente relacionadas con las funciones de Bessel de primer y segundo tipos. Estas son denominadas *funciones de Hankel*

y, esencialmente, se definen como combinaciones lineales de las funciones J_ν y N_ν . La razón de introducir estas nuevas funciones tiene una motivación doble. Primero, con la definición de las funciones de Hankel se tiene una forma elegante de escribir las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. Además del beneficio de que sus representaciones integrales son, en cierto modo, más elegantes en su estructura. Por otro lado, las funciones de Hankel completan la analogía de las funciones de Bessel con las funciones trigonométricas. Mientras que las funciones J_ν y N_ν son análogas a la función coseno y seno respectivamente, las funciones de Hankel son el análogo de las exponenciales imaginarias. Pero este rol no se queda solo en la analogía. Más adelante, cuando desarrollemos las funciones de Bessel modificadas y obtengamos, a través de estas aproximaciones asintóticas de toda la familia de funciones de Bessel, nos daremos cuenta de que la analogía se vuelve exacta para valores grandes de sus respectivos argumentos. Es decir, veremos cómo las funciones J_ν y N_ν son asintóticamente iguales a las funciones coseno y seno respectivamente. Este hecho lo obtendremos al observar que las funciones de Hankel son asintóticamente iguales a funciones exponenciales imaginarias.

Definimos las funciones de Hankel de primer tipo $H_\nu^{(1)}(x)$ y de segundo tipo $H_\nu^{(2)}(x)$ como

$$H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (4.138)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iN_\nu(x). \quad (4.139)$$

Podemos apreciar claramente que las funciones de Hankel de primer y segundo tipo son conjugadas una de la otra. Además, podemos invertir las relaciones para ver que las funciones J_ν y N_ν se expresan como

$$J_\nu(x) = \frac{H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)}{2}, \quad (4.140)$$

$$N_\nu(x) = \frac{H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)}{2i}. \quad (4.141)$$

Como podemos darnos cuenta, estas expresiones son análogas a las relaciones que guardan las funciones coseno y seno respecto de las exponenciales imaginarias, esto es

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad (4.142)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x), \quad (4.143)$$

con sus respectivas inversiones,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (4.144)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (4.145)$$

Los desarrollos en serie que ya hemos obtenido para las funciones J_ν y N_ν nos permiten apreciar que el comportamiento asintótico de las funciones de Hankel cerca del origen $x = 0$, es de la forma (solo retenemos el término dominante de cada serie),

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx -\frac{i\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots, \quad \text{para } \nu > 0, \quad (4.146)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx \frac{i\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots, \quad \text{para } \nu > 0, \quad (4.147)$$

y para el caso $\nu = 0$, tenemos el comportamiento asintótico,

$$H_0^{(1)}(x) \approx \frac{2i}{\pi} \ln(x) + 1 + \frac{2i}{\pi}(\gamma - \ln(2)) + \cdots, \quad (4.148)$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi} \ln(x) + 1 - \frac{2i}{\pi}(\gamma - \ln(2)) + \cdots. \quad (4.149)$$

Veamos ahora las representaciones integrales de las funciones de Hankel. Ya hemos visto que la función de Bessel $J_\nu(x)$ se puede representar como una integral de contorno en el plano complejo, la fórmula de Schlaefli dada en la ecuación (4.97).

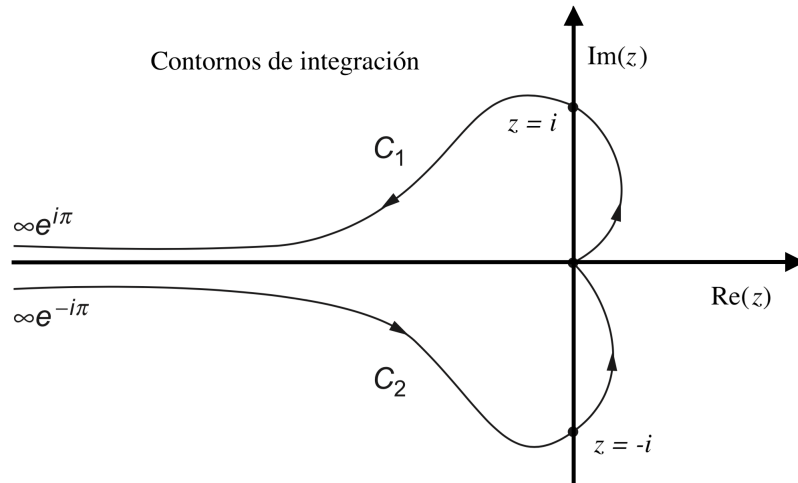


Figura 4.5: Contornos de integración en el plano complejo para las representaciones integrales de las funciones de Hankel. El contorno C_1 (para la función de Hankel de primer tipo) parte del origen y se va a menos infinito en la parte real y cero en su parte imaginaria por el semi-plano superior. El contorno C_2 (para la función de Hankel de segundo tipo) hace lo mismo, pero por el semi-plano inferior.

La integral de Schlaefli para las funciones de Hankel es bastante parecida a la integral para J_ν , cambiando unos factores, así como el contorno de integración. De hecho, las funciones

de Hankel se pueden escribir como

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \oint_{C_1} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} z^{-\nu-1} dz, \quad (4.150)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i\pi} \oint_{C_2} e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} z^{-\nu-1} dz, \quad (4.151)$$

donde los contornos de integración C_1 y C_2 son trayectorias que comienzan en el origen del plano complejo z y se van a menos infinito en la parte real, con parte imaginaria tendiendo a cero. Estos contornos se muestran esquemáticamente en la figura [4.5](#).

Finalmente, conviene decir algunas palabras sobre las relaciones de recurrencia que satisfacen las funciones de Hankel así como sus respectivos wronskianos. Como estas funciones son básicamente combinaciones lineales de las funciones J_ν y N_ν , se puede mostrar directamente que las relaciones de recurrencia que satisfacen $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$ son las mismas que satisfacen las funciones de Bessel de primer tipo, esto es,

$$2 \frac{d}{dx} H_\nu^{(1)}(x) = H_{\nu-1}^{(1)}(x) - H_{\nu+1}^{(1)}(x), \quad (4.152)$$

$$\frac{2\nu}{x} H_\nu^{(2)}(x) = H_{\nu-1}^{(1)}(x) + H_{\nu+1}^{(1)}(x). \quad (4.153)$$

En cuanto a los wronskianos, se puede obtener una gran variedad de relaciones de este tipo debido a la gran familia de funciones que son soluciones de la ecuación de Bessel. Todas estas relaciones se pueden obtener directamente del wronskiano entre J_ν y $J_{-\nu}$ que obtuvimos anteriormente. Entre otras relaciones, no es difícil probar las siguientes

$$H_\nu^{(1)}(x) \frac{d}{dx} H_\nu^{(2)}(x) - H_\nu^{(2)}(x) \frac{d}{dx} H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{4i}{\pi x}, \quad (4.154)$$

$$J_\nu(x) \frac{d}{dx} H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(1)}(x) \frac{d}{dx} J_\nu(x) = \frac{2i}{\pi x}. \quad (4.155)$$

4.3. Funciones de Bessel modificadas

4.3.1. Ecuación de Bessel modificada

Vamos ahora a analizar otra clase de funciones que se derivan del mismo problema que hemos considerado anteriormente, es decir, la solución por separación de variables de la ecuación de onda con geometría circular.

Recordemos que, cuando realizamos el procedimiento de la separación en coordenadas polares para la ecuación de onda, obtuvimos la siguiente ecuación diferencial para la parte radial de problema,

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - (\lambda r^2 + \nu^2) R(r) = 0. \quad (4.156)$$

Cuando introducimos la ecuación de Bessel hicimos la suposición de que la constante de separación toma valores estrictamente negativos, e incluso sustituimos λ por $-k^2$. Sin embargo, el hecho de haber limitado los valores de λ significa que tal vez no tengamos completamente resuelto el problema de Sturm-Liouville para esta ecuación diferencial, por lo que vale la pena investigar la naturaleza de las funciones que se originan al considerar todos los otros valores de la constante de separación y que hemos ignorado hasta ahora.

Lo que vamos a hacer a continuación es, entonces, considerar la ecuación con la constante λ escrita como $\lambda = k^2$ para $k \in \mathbb{R}$. Haciendo esto, es claro que la ecuación correspondiente queda de la forma

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - (k^2 r^2 + \nu^2) R(r) = 0. \quad (4.157)$$

Esta última ecuación se puede transformar en una ecuación libre de la constante k haciendo el cambio de variable $x = kr$, y denotando por $u(x)$ la función tal que $u(kr) = R(r)$. Con este procedimiento tenemos que la ecuación (4.157) queda como

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) - (x^2 + \nu^2) u(x) = 0, \quad (4.158)$$

o bien, desarrollando las derivadas obtenemos

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + \nu^2) u(x) = 0, \quad (4.159)$$

ecuación que recibe el nombre de *ecuación de Bessel modificada*.

4.3.2. Funciones de Bessel modificadas de primer y segundo tipo

Antes de proceder a resolverla por el método de Frobenius, conviene reflexionar un poco sobre la ecuación que tenemos ahora. Hay que recordar, primero, que si quisiéramos resolver la ecuación (4.157), pero con $-k^2$ en lugar de k^2 , ya tendríamos las soluciones linealmente independientes: estas serían simplemente las funciones de Bessel de primer y segundo tipo evaluadas en kr , las funciones $J_\nu(kr)$ y $N_\nu(kr)$. Esto quiere decir lo siguiente: si queremos resolver la ecuación (4.157), hay que ver la forma de transformar k^2 en $-k^2$, lo que de hecho se logra si tomamos k como una variable puramente imaginaria en lugar de real, pensando en su prolongación en el plano complejo.

Este razonamiento nos permite apreciar sin mucho esfuerzo que las funciones $J_\nu(ikr)$ y $N_\nu(ikr)$ son, en efecto, soluciones de la ecuación (4.157). Aunque busquemos, por ahora, funciones reales que resuelvan el problema planteado, conviene explorar ese camino corto usado para obtener estas soluciones. No es difícil darse cuenta también de que las funciones $J_\nu(ix)$ y $N_\nu(ix)$ resolverían, en consecuencia, la ecuación de Bessel modificada (4.159).

En efecto, si consideramos el desarrollo en serie de la función de Bessel de primer tipo $J_\nu(x)$,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (4.160)$$

y sustituimos x por ix , obtenemos

$$\begin{aligned} J_\nu(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Esto quiere decir que, la función $J_\nu(ix)$ no es real, pero multiplicando por el factor constante $i^{-\nu}$ se convierte en una función real, la cual sigue siendo solución de la ecuación de Bessel modificada. Esta función la vamos a denotar por $I_\nu(x)$ y la definimos como

$$I_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (4.162)$$

o escrito de una forma compacta

$$I_\nu(x) := i^{-\nu} J_\nu(x). \quad (4.163)$$

La función $I_\nu(x)$ se le llama *función de Bessel modificada de primer tipo*.

De la misma forma en la que construimos la solución I_ν para la ecuación de Bessel modificada, podemos construir una segunda solución linealmente independiente de I_ν . Aunque podríamos tomar como segunda solución la función de Neumann con argumento imaginario, es conveniente, por razones que veremos más adelante, definir la segunda solución de la ecuación de Bessel modificada considerando la función de Hankel de primer tipo con argumento imaginario. Vamos, entonces, a introducir una nueva función $K_\nu(x)$, llamada *función de Bessel modificada de segundo tipo*, definida como

$$K_\nu(x) := \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (4.164)$$

El factor $i^{\nu+1}$ que se introduce en la definición de K_ν es para que dicha función sea real cuando la variable x es real. Esta definición de la función de Bessel modificada de segundo tipo se puede escribir alternativamente como

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (4.165)$$

En las gráficas de la figura [4.6](#) podemos apreciar tanto el comportamiento de las funciones $I_\nu(x)$ como el de las funciones $K_\nu(x)$, para los primeros valores enteros no negativos de ν .

4.3.3. Relaciones de recurrencia

Debido a la relación directa entre la función I_ν y la función de Bessel J_ν , tenemos que varias de las propiedades que posee J_ν se pueden escribir directamente como propiedades de I_ν . En particular, nos vamos a interesar, a continuación, por las relaciones de recurrencia para las funciones $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$.

Por ejemplo, a partir de la relación de recurrencia

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \quad (4.166)$$

podemos escribir, cambiando x por ix , como

$$2J'_\nu(ix) = J_{\nu-1}(ix) - J_{\nu+1}(ix). \quad (4.167)$$

Recordando ahora que $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ y notando que

$$I'_\nu(x) = \frac{d}{dx} I_\nu(x) = \frac{d}{dx} (i^{-\nu} J_\nu(ix)) = i^{-\nu+1} J'_\nu(ix),$$

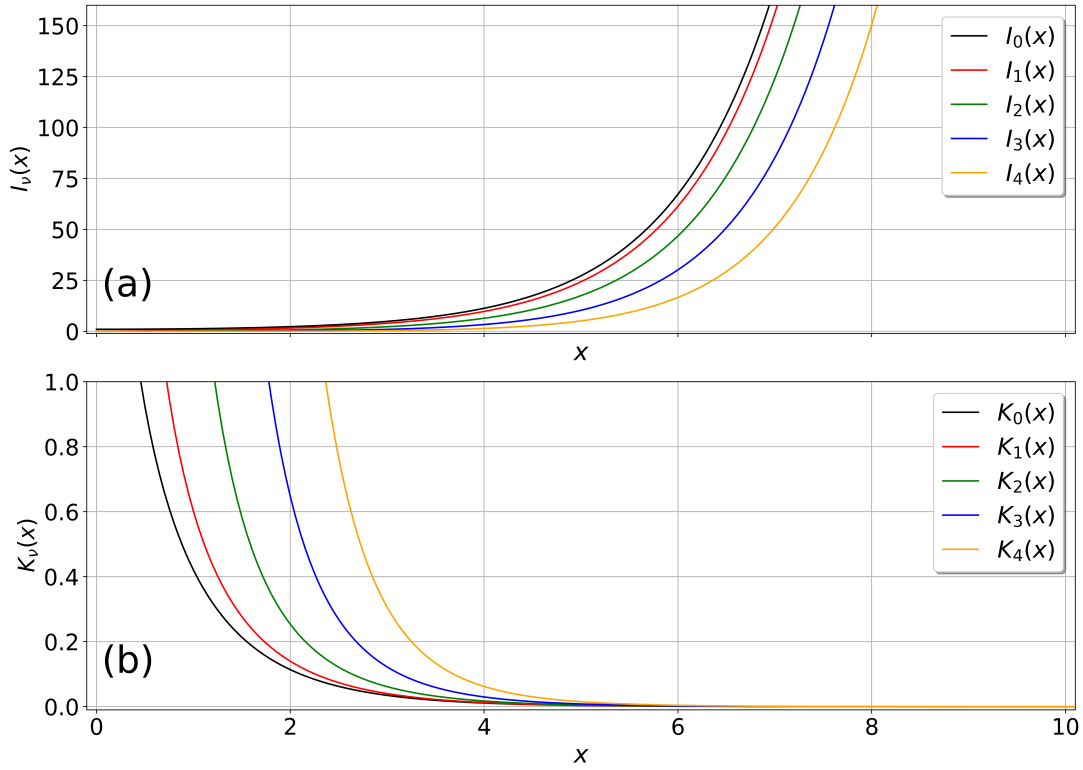


Figura 4.6: Gráficas de las funciones de Bessel modificadas. En el panel (a) se muestran las primeras cinco funciones de Bessel modificadas de primer tipo de orden ν entero correspondientes a $\nu = 0, 1, 2, 3$ y 4 . En el panel (b) se muestran las primeras funciones de Bessel modificadas de primer tipo de órdenes $\nu = 0, 1, 2, 3$ y 4 . Debemos notar que las funciones de Bessel modificadas de primer tipo, $I_\nu(x)$, tienen un comportamiento reminiscente de la función exponencial creciente, mientras que las funciones de Bessel modificadas de segundo tipo, $K_\nu(x)$, tienen rasgos que asemejan el comportamiento de una exponencial decreciente.

tenemos, entonces, que la ecuación (4.167) se puede escribir como

$$2i^{\nu-1}I'_\nu(x) = i^{\nu-1}I_{\nu-1}(x) - i^{\nu+1}I_{\nu+1}(x), \quad (4.168)$$

en donde hemos hecho uso de las identidades $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$ y $J'_\nu(ix) = i^{\nu-1}I'_\nu(x)$. Simplificando la igualdad (4.168) se obtiene

$$2I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - i^2 I_{\nu+1}(x), \quad (4.169)$$

lo que resulta en

$$2I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x). \quad (4.170)$$

No es difícil mostrar que la relación de recurrencia para J_ν ,

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x), \quad (4.171)$$

nos conduce a la siguiente relación de recurrencia para I_ν ,

$$\frac{2\nu}{x}I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x). \quad (4.172)$$

Al igual que se obtienen relaciones de recurrencia para I_ν a partir de las correspondientes relaciones para J_ν , podemos obtener las correspondientes relaciones de recurrencia para K_ν . A continuación, presentamos un resumen de las principales relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel modificadas.

Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel modificadas

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x) \quad (4.173)$$

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}I_\nu(x) \quad (4.174)$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x) \quad (4.175)$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x}K_\nu(x) \quad (4.176)$$

4.3.4. Representaciones integrales

Al igual que las relaciones de recurrencia, las representaciones integrales de I_ν y K_ν se pueden obtener a partir de las funciones de Bessel. Por ejemplo, un cálculo directo muestra que la representación integral de $I_\nu(x)$ se puede obtener directamente de la representación integral de J_ν , lo que explícitamente puede escribirse como

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})} z^{-\nu-1} dz, \quad (4.177)$$

donde C es el mismo contorno de integración que el correspondiente para la representación integral (fórmula de Schlaefli) de J_ν .

Al igual que las otras funciones de la familia de las funciones de Bessel, la función K_ν también puede escribirse como una integral de Schlaefli. La demostración de esta representación integral se puede encontrar en el libro de G. N. Watson [67],

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_D e^{-\frac{z}{2}(t+\frac{1}{t})} t^{-\nu-1} dt, \quad (4.178)$$

donde D es el contorno de integración que se muestra en la figura 4.7.

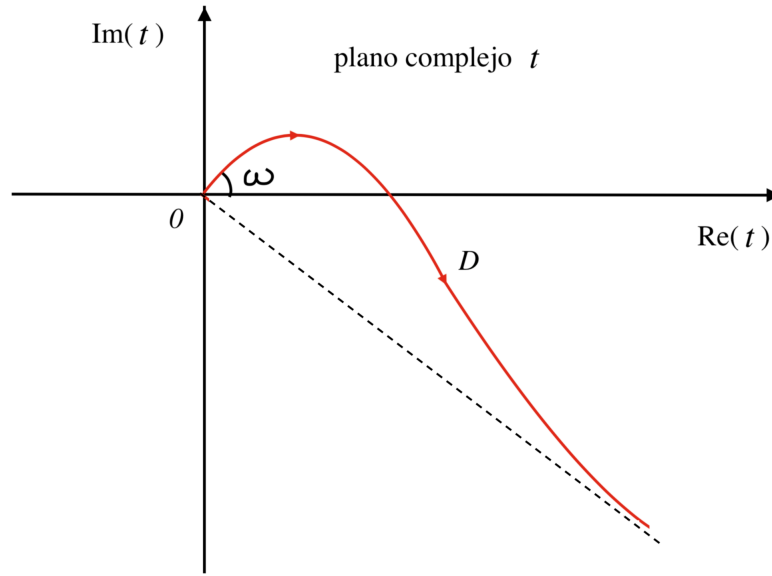


Figura 4.7: Contorno de integración en el plano complejo t para la representación integral de la función modificada de Bessel de segundo tipo $K_\nu(z)$. En este caso, ω es complejo sujeto a la condición $-\pi < \omega < \pi$ y el argumento de K_ν , la variable z , está restringida a la condición $-\frac{\pi}{2} + \omega < \arg(z) < \omega + \frac{\pi}{2}$.

Estas representaciones se pueden usar para obtener una pléyade de diferentes representaciones integrales de dichas funciones. En particular, algunas representaciones integrales de la función $K_\nu(x)$ son muy importantes al momento de obtener expresiones asintóticas para toda la familia de las funciones de Bessel, tal como lo veremos más adelante.

A partir de las representaciones integrales para I_ν y K_ν expuestas arriba, es posible obtener representaciones integrales a lo largo de la recta real. Estas representaciones se pueden

escribir como

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta) e^{x \cos(\theta)} d\theta - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh(t) - \nu t} dt, \quad (4.179)$$

$$K_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\pi\nu}}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{ix}{2}(u - \frac{1}{u})} u^{-\nu-1} du. \quad (4.180)$$

La primer integral se obtiene de considerar el contorno de integración para J_ν , mientras que la segunda se obtiene girando rígidamente el contorno de la figura [4.7](#) hasta que la asíntota (línea negra punteada) coincida con el semi-eje imaginario negativo [\[67\]](#).

De hecho, la representación integral para $K_\nu(x)$ se puede escribir alternativamente como,

$$K_\nu(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\pi\nu}}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-ix \sinh(t) + \nu t} dt. \quad (4.181)$$

Haciendo $\nu = 0$, en las expresiones anteriores se pueden obtener las correspondientes representaciones integrales para las funciones $I_0(x)$ y $K_0(x)$, lo que resulta en

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(x \cos(\theta)) d\theta, \quad (4.182)$$

$$K_0(z) = \int_0^\infty \cos(x \sinh(t)) dt. \quad (4.183)$$

Entre muchas otras representaciones, podremos encontrar particularmente útiles las siguientes expresiones

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z \cos(\theta)} \sin^{2\nu}(\theta) d\theta, \quad (4.184)$$

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm zx} (1 - x^2)^{\nu-1/2} dx, \quad (4.185)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \sinh^{2\nu}(t) dt, \quad (4.186)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{\nu-1/2} dx, \quad (4.187)$$

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt. \quad (4.188)$$

La demostración de estas identidades solamente la vamos a esbozar, para que el lector tenga una guía para realizar los cálculos correspondientes. La identidad [\(4.184\)](#) se puede

obtener tomando el desarrollo en serie de la función exponencial y reduciendo la expresión al desarrollo en serie para $I_\nu(x)$ de la ecuación (4.162). La identidad (4.185) se puede obtener realizando un cambio de variable en la integral de la ecuación (4.184). Por su parte, la igualdad (4.186) se obtiene a partir de la identidad (4.184) y empleando la expresión para $K_\nu(x)$ en términos de I_ν , esto es, la ecuación (4.165). Luego, la identidad (4.187) se demuestra mediante un sencillo cambio de variable en la integral de la ecuación (4.186). Finalmente, la identidad (4.188) se obtiene haciendo uso de la expresión (4.179) y la igualdad (4.165).

4.4. Expresiones asintóticas

Vamos ahora a establecer expresiones asintóticas para cada miembro de la familia de funciones de Bessel. Estas expresiones, como veremos a continuación se pueden derivar de solo un desarrollo asintótico: el correspondiente a la función de Bessel modificada de segundo tipo, K_ν .

Nuestro punto de partida es la representación integral de la función K_ν de la ecuación (4.187), esto es,

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{\nu-1/2} dx. \quad (4.189)$$

Realizando el cambio de variable $x = 1 + t/z$ en la integral anterior, podemos ver que $K_\nu(z)$ se puede escribir alternativamente como:

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt. \quad (4.190)$$

Ahora hacemos uso del teorema del binomio para desarrollar, en una serie de potencias, el factor $\left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu-1/2}{k} \left(\frac{t}{2z}\right)^k, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu-1/2)!}{(\nu-1/2-k)!k!} \left(\frac{t}{2z}\right)^k, \end{aligned} \quad (4.191)$$

lo que nos permite escribir $K_\nu(z)$ como

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu-1/2)!}{(\nu-1/2-k)!k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(\frac{t}{2z}\right)^k dt. \quad (4.192)$$

En la expresión anterior, observamos que la integral que resulta se puede escribir exactamente como una función gamma,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1/2} \left(\frac{t}{2z}\right)^k dt = \frac{1}{2^k z^k} \int_0^\infty e^{-t} t^{k+\nu-1/2} dt = \frac{1}{2^k z^k} \Gamma(k + \nu - 1/2),$$

lo que muestra que

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu-1/2)!}{(\nu-1/2-k)!k!} \frac{1}{2^k z^k} \Gamma(k + \nu - 1/2). \quad (4.193)$$

Simplificando la expresión anterior obtenemos, finalmente,

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \nu - 1/2)}{\Gamma(\nu - k + 1/2)} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2z}\right)^k. \quad (4.194)$$

Se debe hacer notar que la expresión anterior para la función de Bessel modificada de segundo tipo, $K_\nu(z)$, es un desarrollo en serie de potencias inversas del argumento de la función. Esta forma del desarrollo obtenido, permite saber cuál es el término dominante cuando la magnitud de z tiende a infinito. Como la magnitud de $1/z$ va a cero con $z \rightarrow \infty$, es claro que en dicho límite los primeros términos del desarrollo (4.194) son los que dominan el comportamiento de $K_\nu(z)$ con $z \rightarrow \infty$. En particular, el término correspondiente a $k = 0$ es el que domina principalmente,

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1! 8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2! (8z)^2} + \dots \right], \quad (4.195)$$

es decir,

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad (4.196)$$

para $z \rightarrow \infty$.

Con este resultado podemos explorar el comportamiento asintótico del resto de la familia de funciones de Bessel haciendo uso de las múltiples identidades que hemos obtenido. Comencemos analizando la función de Hankel de primer tipo, debido a que con esta función hemos definido, previamente, la función K_ν . De la expresión (4.164), podemos ver que

$$H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi} i^{-\nu-1} K_\nu(x), \quad (4.197)$$

o bien, intercambiando x por $-ix$,

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi} i^{-\nu-1} K_\nu(-ix). \quad (4.198)$$

De esta manera, cuando hacemos tender x a infinito, es claro que la magnitud de ix también va a infinito, por lo que podemos hacer uso de la expresión (4.196). Esto nos muestra que

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{2}{\pi} i^{-\nu-1} \sqrt{\frac{\pi}{-2ix}} e^{-ix}, \quad (4.199)$$

o bien, simplificando un poco y reacomodando factores (recuérdese que $i = e^{i\pi/2}$), tenemos que:

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(ix - \frac{i\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.200)$$

para x tendiendo a infinito.

Una vez que tenemos el comportamiento de $H_\nu^{(1)}(x)$, podemos obtener el comportamiento de $H_\nu^{(2)}(x)$, pues esta última es conjugada de la primera. No es sorpresa, entonces, que

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(-ix + \frac{i\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.201)$$

con $x \rightarrow \infty$.

Por otro lado, recordando que las funciones de Hankel se definieron en términos de las funciones de Bessel de primer y segundo tipo como

$$H_\nu^{(1)}(x) := J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (4.202)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) := J_\nu(x) - iN_\nu(x), \quad (4.203)$$

tenemos que

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)), \quad (4.204)$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i} (H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)), \quad (4.205)$$

en completa analogía con las funciones seno, coseno y las exponenciales imaginarias. Haciendo ahora uso de las expresiones asintóticas de las funciones de Hankel, podemos ver que el comportamiento asintótico de las funciones de Bessel de primer y segundo tipo luce como,

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.206)$$

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (4.207)$$

lo que hace la analogía mucho más precisa cuando x tiende a infinito.

Finalmente, la última función cuyo comportamiento asintótico nos falta explorar es la función de Bessel modificada de segundo tipo. Puesto que I_ν se define como la función J_ν con argumento imaginario, esto es,

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad (4.208)$$

es claro que el comportamiento asintótico para I_ν se puede obtener directamente de la ecuación anterior. Tenemos entonces que

$$I_\nu(x) \approx i^{-\nu} \sqrt{\frac{2}{\pi ix}} \cos\left(ix - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right). \quad (4.209)$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, tenemos que

$$\cos(ix + a) \approx \frac{1}{2}e^x e^{ia}, \quad (4.210)$$

entonces, resulta claro que

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (4.211)$$

en donde hemos hecho uso de la identidad $i = e^{i\pi/2}$.

4.5. Ecuaciones en derivadas parciales en coordenadas polares

4.5.1. Ecuación de onda en un dominio circular

A continuación resolveremos la ecuación de onda en 2D y analizaremos la forma de resolverla usando la técnica de separación de variables, y veremos cómo las funciones de Bessel que hemos desarrollado nos ayudan a escribir la solución a nuestro problema. Comencemos estableciendo, con todo detalle, el problema físico que nos interesa resolver.

Nuestro problema se origina cuando queremos describir las deformaciones de una hoja circular, elástica, con su perímetro fijo en alguna superficie rígida. Es decir, vamos a considerar el problema de describir las deformaciones de una “hoja de tambor”.

Si denotamos por $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, t)$ el campo de deformaciones de una hoja de tambor, la ecuación en derivadas parciales que describe la dinámica de $\psi(\mathbf{r}, t)$ viene dada por la ecuación de onda 2D, es decir,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.212)$$

siendo c^2 una constante que depende de las características del material. Como los extremos de la hoja de tambor están fijos, naturalmente, las condiciones de contorno en este caso se escriben como

$$\psi(\mathbf{r}, t) \Big|_{|\mathbf{r}|=a} = 0. \quad (4.213)$$

Se debe notar que estas condiciones de contorno toman en cuenta que el sistema de referencia se ha colocado de tal manera que el centro de la hoja circular coincide con

el origen. Esto se aprecia mejor en la figura 4.9, en la que se muestra claramente la ubicación de los ejes coordenados, así como el perímetro circular que delimita la hoja de tambor. Sobre dicho perímetro, el campo de deformaciones $\psi(\mathbf{r}, t)$ debe desaparecer, lo que corresponde a la condición física de que la hoja se encuentre fija en su periferia.

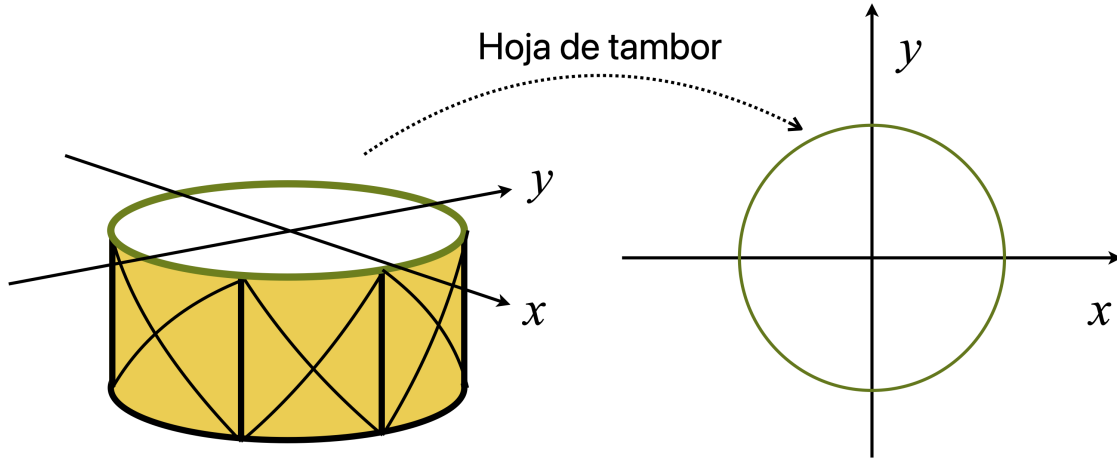


Figura 4.8: Representación esquemática de una hoja de tambor. La imagen a la izquierda representa un tambor cuya hoja superior, al perturbarse, se deforma de manera continua en el tiempo, lo que denominamos vibración. A la derecha tenemos una representación abstracta de la hoja de tambor en donde colocamos un eje de referencia para describir las vibraciones por medio de la ecuación de onda.

Hay que hacer una observación más respecto de las condiciones de contorno. Puesto que vamos a emplear coordenadas polares, como ya lo hemos dejado de manifiesto al inicio de este capítulo, vamos a escribir las condiciones de frontera específicamente con esas coordenadas. Escribiremos, entonces, la función $\psi(\mathbf{r}, t)$ como dependiente de las variables de coordenadas polares (r, ϕ) , esto es, $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r, \phi, t)$. La condición de contorno (4.213) se escribe, entonces, como

$$\psi(r = a, \phi, t) = 0, \quad (4.214)$$

para todo $t > 0$ y toda $\phi \in [0, 2\pi)$. Pero debemos notar una cosa más. Aunque en principio esta última igualdad corresponde a la única restricción física del problema, tenemos una condición más que debemos imponer debido al sistema coordenado que hemos escogido y que se relaciona íntimamente con la simetría del problema,

$$\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t), \quad (4.215)$$

lo que debe ocurrir para cualquier $t > 0$, $r > 0$ y toda $\phi \in [0, 2\pi)$. Esta condición ya la hemos explorado anteriormente y la hemos denominado *condición periódica de frontera*. Veremos más adelante que esta condición de frontera para la variable angular se vuelve importante para la selección de las soluciones correspondientes después de aplicar la separación de variables.

Además de las condiciones de contorno, es necesario establecer las condiciones iniciales. Como tenemos una ecuación de segundo orden en el tiempo, es necesario contar con dos condiciones iniciales. Esto es, vamos a suponer que al tiempo $t = 0$ el campo de deformaciones y su derivada tienen ciertos valores. Esto es,

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}), \quad (4.216)$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}), \quad (4.217)$$

donde $f(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r})$ son dos funciones dadas.

En resumen, el problema que buscamos resolver es la ecuación de onda con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales siguientes:

Ecuación de onda 2D con condiciones de frontera tipo Dirichlet en dominio circular $0 \leq \ \mathbf{r}\ \leq a$ y en coordenadas polares		
$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera $\psi(r = a, \phi, t) = 0,$ $\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t),$	Condiciones iniciales $\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}),$ $\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}).$

Ya hemos visto anteriormente, al aplicar el método de separación de variables en la ecuación de onda en coordenadas polares, que al escribir la función $\psi(r, \phi, t)$ como el producto de funciones $\psi(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$ las correspondientes ecuaciones separadas se pueden escribir como:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (-\lambda r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \quad (4.218)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4.219)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \lambda c^2 T = 0, \quad (4.220)$$

donde ν^2 y λ son las constantes de separación.

Debemos notar que la constante de separación ν^2 se ha escogido como positiva. Aunque en principio deberíamos considerar todos los posibles valores de la constante de separación, esto es, tanto positivos como negativos, esta elección se puede justificar fácilmente. Con esta elección de la constante de separación podemos notar que las soluciones linealmente independientes de la ecuación para Φ son las funciones

$$\cos(\nu\phi), \quad \text{y} \quad \sin(\nu\phi).$$

Si en lugar de haber escrito la constante de separación como positiva se hubiera escrito como negativa, esto es, en lugar de ν^2 escribimos $-\nu^2$, las soluciones para Φ tendrían la forma

$$\exp(\nu\phi), \quad \text{y} \quad \exp(-\nu\phi).$$

Para decidir qué conjunto de funciones debemos escoger, hay que recurrir a las condiciones de frontera. Primero que nada, debemos notar que, cuando escribimos la condición de frontera en la variable ϕ para $\psi(r, \phi, t)$ en términos de las funciones de separación, obtenemos

$$\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t) \quad \Rightarrow \quad R(r)\Phi(\phi)T(t) = R(r)\Phi(\phi + 2\pi)T(t), \quad (4.221)$$

lo que implica directamente que la función Φ debe ser una función periódica con periodo 2π . Como las funciones exponenciales con argumento real no son periódicas, hay que descartarlas como soluciones potenciales de nuestro problema. De esta manera justificamos plenamente la elección de ν^2 como la constante de separación.

Lo que vamos a hacer a continuación consiste en elegir los valores de ν para los cuales se satisfacen las condiciones de frontera. Como las soluciones que nos quedan después de la discusión anterior son las funciones trigonométricas $\cos(\nu\phi)$ y $\sin(\nu\phi)$, es claro que se trata de funciones periódicas. Y puesto que buscamos que las funciones sean periódicas con periodo 2π , entonces, escogemos ν de tal manera que esto suceda, es decir, tomamos $\nu = m \in \mathbb{Z}$. Con esto garantizamos que $\cos(m\phi)$ y $\sin(m\phi)$ son funciones periódicas con periodo 2π . Debemos hacer notar que los valores negativos de m no proveen de soluciones linealmente independientes, de manera que debemos limitar los valores de m a los naturales, incluyendo el cero. Esto quiere decir que el conjunto de soluciones linealmente independientes para Φ está dado por

$$\{\cos(m\phi), \sin(m\phi) : m \in \mathbb{N}_0\}. \quad (4.222)$$

Conviene indicar que la elección del conjunto con funciones linealmente independientes se puede, en este caso, modificar ligeramente para escribir las ecuaciones posteriores de manera elegante. Nos queda claro que las soluciones a la ecuación para Φ pueden escribirse alternativamente como exponenciales con argumento imaginario, es decir, como $e^{\pm im\phi}$. En este caso, el doble signo $\pm$ se incluye para considerar que las exponenciales con argumento

imaginario positivo *sí* son linealmente independientes de las que tienen el argumento positivo. Sin embargo, si consideramos $m \in \mathbb{Z}$, estaremos incluyendo en el listado tanto las que tienen argumento negativo como positivo. Esto quiere decir que el conjunto de soluciones para Φ , puede escribirse alternativamente como

$$\{e^{im\phi} : m \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.223)$$

Aunque la elección del conjunto de soluciones en principio no afecta en nada la solución, elegiremos por conveniencia las soluciones para Φ como las exponenciales imaginarias, esto es,

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi} \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}. \quad (4.224)$$

Cabe aclarar que las constantes de integración las incluiremos al final, pues debido al orden de la derivada temporal, tenemos dos condiciones iniciales que deben fijar dos constantes de integración.

Analicemos ahora las soluciones para $R(r)$, la parte radial de la separación de variables. Debido a que hemos obtenido las funciones de Bessel resolviendo la parte radial de la separación de variables, no es ninguna sorpresa que la función $R(r)$ pueda expresarse como combinación lineal de las funciones de Bessel. Pero por dejar completo el esquema de solución.

Primero, vamos a escribir la ecuación para la función radial con los valores que hemos obtenido para la constante de separación ν^2 , de hecho, ya hemos dejado claro que vamos a escribir $\nu = m \in \mathbb{Z}$ con el esquema de soluciones como exponenciales imaginarias para Φ . De esta forma tenemos que

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (-\lambda r^2 - m^2)R(r) = 0. \quad (4.225)$$

Ahora, hasta este momento tenemos que cualquier valor de λ podría ser solución potencial de nuestro problema. Pero vamos a descartar algunas de una vez. Antes de hacer esto, debemos saber cómo se reflejan las condiciones de frontera en la función radial $R(r)$. De hecho, si recordamos que hemos impuesto la condición de bordes fijos para la hoja de tambor, lo cual se escribe como $\psi(r = a, \phi, t) = 0$, tenemos entonces que

$$\psi(r = a, \phi, t) = R(a)\Phi(\phi)T(t) = 0, \quad (4.226)$$

lo que de hecho se satisface si imponemos la condición

$$R(a) = 0. \quad (4.227)$$

Esto quiere decir que las soluciones para la ecuación radial deben tener, por lo menos, una raíz para un argumento positivo.

Procedamos a analizar las soluciones de acuerdo con los valores de λ . Si suponemos que λ es positivo, entonces, la ecuación para R se puede escribir como

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (-k^2 r^2 - m^2) R(r) = 0. \quad (4.228)$$

Si hacemos el cambio de variable $x = kr$ (como ya lo hicimos en secciones anteriores) y definimos $u(x)$ tal que $R(r) = u(kr)$, la ecuación para $u(x)$ resulta en

$$x^2 u'' + x u' - (x^2 + m^2) u(x) = 0,$$

que resulta ser la ecuación de Bessel modificada. Ahora, como estamos pidiendo que la función radial tenga por lo menos una raíz positiva, no hay forma de que eso lo cumpla la combinación lineal entre las funciones $I_m(x)$ y $K_m(x)$, debido a su comportamiento para $x > 0$ ⁴.

De este modo dejamos indicado que, en este problema, la constante de separación λ debe ser negativa. Si escribimos $\lambda = -k^2$, la ecuación para $R(r)$ se escribe como

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - m^2) R(r) = 0, \quad (4.229)$$

y al hacer el cambio de variable $x = kr$ y definiendo $u(x)$ tal que $R(r) = u(kr)$, la ecuación para $u(x)$ resulta en

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - m^2) u(x) = 0,$$

que es la ecuación de Bessel. Las soluciones para $u(x)$ se pueden escribir, entonces, como combinación lineal de las funciones de Bessel de primer y segundo tipo como

$$u(x) = c_1 J_m(x) + c_2 N_m(x). \quad (4.230)$$

Esta igualdad en realidad corresponde a escribir la solución para $R(r)$ como

$$R(r) = c_1 J_m(kr) + c_2 N_m(kr). \quad (4.231)$$

Ya que tenemos escrita la solución más general para $R(r)$ tenemos ahora que fijar los valores permitidos para k haciendo uso de las condiciones en la frontera. Pero, además de las condiciones en la frontera, tenemos que hacer consideraciones sobre el tipo de soluciones que buscamos, en el sentido de que sean compatibles con el problema físico que estamos resolviendo. Este comentario tiene que ver con el hecho de que la función de

⁴En realidad, lo que deberíamos pedir es que I_m sea la función que contenga raíces, ya que la función $K_m(x)$ debe descartarse como solución debido a su divergencia en el origen, un comportamiento no esperado físicamente.

Neumann $N_m(kr)$ tiene una divergencia en el origen. Si admitiésemos que $R(r)$ incluye la función de Neumann como se establece en la ecuación (4.231), entonces, tendríamos una irregularidad en $r = 0$, en el sentido de que la función $R(r)$ diverge en ese punto. Si trasladamos esta observación a la función $\psi(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$, tendríamos, con esta solución, una divergencia del campo de deformaciones ψ justo en el origen. Esto es, en el punto central del tambor tendríamos siempre una deformación infinita, una propiedad que es incompatible con la física del problema (un hoja de tambor tiene deformaciones finitas todo el tiempo).

Esta discusión que hemos hecho sobre la segunda solución la ecuación de Bessel (la función de Neumann) y su compatibilidad con la física del problema, nos indica que debemos descartar la función $N_m(x)$ de la expresión para $R(r)$. Esto significa que debemos fijar la constante de integración $c_2 = 0$ en la ecuación (4.231), lo que nos permite escribir

$$R(r) = J_m(kr), \quad (4.232)$$

en donde hemos omitido la constante de integración c_1 que incluiremos más adelante cuando construyamos la solución completa para $\psi(r, \phi, t)$. Si ahora imponemos la condición de frontera $R(a) = 0$ que establecimos en párrafos anteriores, tenemos que

$$R(a) = J_m(ka) = 0. \quad (4.233)$$

Esto indica que los valores permitidos para la constante k deber ser tales que

$$ka = \alpha_{m,\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad (4.234)$$

siendo $\alpha_{m,\ell}$ el ℓ -ésimo cero de la función de Bessel de orden m . Entonces, de entre todos los posibles valores para la constante de separación, vemos que los únicos compatibles con las condiciones de frontera se escriben como

$$k = k_{m,\ell} := \frac{\alpha_{m,\ell}}{a}. \quad (4.235)$$

Esto tiene una consecuencia más: las funciones $R(r)$ compatibles con las condiciones de frontera se escriben como

$$R_{m,\ell}(r) = J_m\left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a}\right). \quad (4.236)$$

De acuerdo con la teoría Sturm-Liouville, las funciones $R_{m,\ell}(r)$ son ortogonales respecto al índice ℓ y forman un conjunto completo en el espacio de $\mathcal{L}^2(0, a)$. En este caso, las funciones $R_{m,\ell}(r)$ son ortogonales con el producto interno

$$\int_0^a r R_{m,\ell}(r) R_{m,\ell'}(r) dr = \int_0^a r J_m\left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a}\right) J_m\left(\alpha_{m,\ell'} \frac{r}{a}\right) dr = N_{m,\ell}^2 \delta_{\ell,\ell'}, \quad (4.237)$$

siendo $N_{m,\ell}^2$ la norma cuadrada de las funciones de Bessel, la cual se define como

$$N_{m,\ell}^2 = \int_0^a r J_m^2 \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) dr, \quad (4.238)$$

y se puede escribir explícitamente como

$$N_{m,\ell}^2 = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2 (\alpha_{m,\ell}). \quad (4.239)$$

Una vez que hemos resuelto las ecuaciones para la parte radial $R(r)$ y para la parte angular $\Phi(\phi)$, podemos proceder a establecer la solución para la parte temporal $T(t)$, pues ya tenemos completamente determinados los valores de las constantes de separación. Sustituyendo λ por $-k_{m,\ell}^2$, tenemos que la ecuación diferencial para $T(t)$ se escribe como [c.f. ecuación (4.220)],

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + k_{m,\ell}^2 c^2 T = 0, \quad (4.240)$$

cuya solución se puede escribir como

$$T(t) = A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell} t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell} t), \quad (4.241)$$

donde hemos definido $\omega_{m,\ell}$ como,

$$\omega_{m,\ell} = k_{m,\ell} c. \quad (4.242)$$

Ahora que ya tenemos las soluciones para todas las ecuaciones separadas, podemos escribir las soluciones (que son infinitas) de la ecuación de onda (4.212) con las condiciones de frontera (4.213). Estas soluciones se pueden escribir explícitamente como

$$\psi_{m,\ell}(r, \phi, t) = J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} [A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell} t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell} t)], \quad (4.243)$$

en donde hemos hecho uso de las soluciones halladas y expresadas explícitamente en las ecuaciones (4.224), (4.236) y (4.241). Debemos recordar, además, que los posibles valores de m y ℓ son infinitos y se encuentran en los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ respectivamente. Ahora, dado que para cada $m \in \mathbb{Z}$ y $\ell \in \mathbb{N}$ tenemos que $\psi_{m,\ell}(r, \phi, t)$ resuelve la ecuación de onda con las condiciones de contorno establecidas, entonces, cualquier combinación lineal de dichas funciones también lo hará. Y, gracias a la teoría de Sturm-Liouville que establece la completitud del conjunto de funciones propias de operadores autoconjugados, sabemos que cualquier solución que busquemos (que han de satisfacer las condiciones iniciales

dadas) se puede escribir como la combinación lineal de las funciones propias $\psi_{m,\ell}(r, \phi, t)$. Entonces, la solución general la expresamos como:

$$\psi(r, \phi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} [A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell} t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell} t)]. \quad (4.244)$$

Nótese que los coeficientes del desarrollo son en este caso $A_{m,\ell}$ y $B_{m,\ell}$.

De esta manera, la solución particular que buscamos es aquella que satisface las condiciones iniciales dadas en las ecuaciones (4.216) y (4.217), las cuales reescribimos a continuación,

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}) = f(r, \phi), \quad (4.245)$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}) = g(r, \phi). \quad (4.246)$$

Si imponemos dichas condiciones iniciales, no es difícil observar que estas resultan en las igualdades

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} = f(r, \phi), \quad (4.247)$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} = g(r, \phi). \quad (4.248)$$

De nueva cuenta, gracias a la teoría de Sturm-Liouville, que nos garantiza la propiedad de ortogonalidad (que ya establecimos en secciones anteriores), tenemos que los coeficientes $A_{m,\ell}$ y $B_{m,\ell}$ se pueden “despejar” invocando, justamente, la propiedad de ortogonalidad.

Siguiendo el procedimiento que ya hemos realizado antes, no es difícil obtener las expresiones para los coeficientes del desarrollo en términos de cuadraturas. Por ejemplo, multiplicando la igualdad (4.247) por $J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi}$ e integrando en el disco de radio a obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} \int_0^r \int_0^{2\pi} r J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi} J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} d\phi dr \\ = \int_0^r \int_0^{2\pi} r f(r, \phi) J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi} d\phi dr, \end{aligned}$$

y empleando la propiedad de ortogonalidad reconocemos inmediatamente que

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} r J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi} J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} d\phi dr = 2\pi N_{m,\ell}^2 \delta_{m,m'} \delta_{\ell,\ell'},$$

siendo $N_{m,\ell}^2$ la norma cuadrada de la función de Bessel $J_m(k_{m,\ell}r)$, la cual está dada por

$$N_{m,\ell}^2 = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{m,\ell}),$$

tal como lo vimos en secciones anteriores. De este modo tenemos que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} 2\pi N_{m,\ell}^2 \delta_{m,m'} \delta_{\ell,\ell'} = \int_0^r \int_0^{2\pi} r f(r, \phi) J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi} d\phi dr,$$

lo que implica que:

$$A_{m',\ell'} 2\pi N_{m,\ell}^2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} r f(r, \phi) J_{m'} \left(\alpha_{m',\ell'} \frac{r}{a} \right) e^{-im'\phi} d\phi dr,$$

esto significa que el coeficiente $A_{m,\ell}$ se puede obtener realizando la siguiente integración:

$$A_{m,\ell} = \frac{1}{2\pi N_{m,\ell}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \phi) J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{-im\phi} r dr d\phi. \quad (4.249)$$

Del mismo modo que obtuvimos la expresión anterior para el coeficiente $A_{m,\ell}$, podemos proceder para hallar una expresión equivalente para $B_{m,\ell}$. Después de algunos cálculos podemos obtener

$$B_{m,\ell} = \frac{1}{2\pi \omega_{m,\ell}} \frac{1}{N_{m,\ell}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \phi) J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{-im\phi} r dr d\phi. \quad (4.250)$$

Resumen de solución

Ecuación de onda 2D con condiciones de frontera tipo Dirichlet
en dominio circular $0 \leq \|\mathbf{r}\| \leq a$ y en coordenadas polares

$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera	Condiciones iniciales
	$\psi(r = a, \phi, t) = 0,$ $\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t),$	$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}),$ $\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}).$

La solución viene dada por:

$$\psi(r, \phi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} J_m \left(\alpha_{m, \ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} [A_{m, \ell} \cos(\omega_{m, \ell} t) + B_{m, \ell} \sin(\omega_{m, \ell} t)], \quad (4.251)$$

con los coeficientes del desarrollo expresados como:

$$A_{m, \ell} = \frac{1}{2\pi N_{m, \ell}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \phi) J_m \left(\alpha_{m, \ell} \frac{r}{a} \right) e^{-im\phi} r dr d\phi, \quad (4.252)$$

$$B_{m, \ell} = \frac{1}{2\pi \omega_{m, \ell}} \frac{1}{N_{m, \ell}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a g(r, \phi) J_m \left(\alpha_{m, \ell} \frac{r}{a} \right) e^{im\phi} r dr d\phi. \quad (4.253)$$

En este caso la cantidad $N_{m, \ell}^2$ representa la norma cuadrada de las funciones de Bessel:

$$N_{m, \ell}^2 = \int_0^a r J_m^2 \left(\alpha_{m, \ell} \frac{r}{a} \right) dr = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(\alpha_{m, \ell}), \quad (4.254)$$

mientras que $\alpha_{m, \ell}$ es la m -ésima raíz de $J_m(x)$ y $\omega_{m, \ell}$ está dada por

$$\omega_{m, \ell} = k_{m, \ell} c, \quad k_{m, \ell} := \frac{\alpha_{m, \ell}}{a}, \quad J_m(\alpha_{m, \ell}) = 0.$$

Para completar este ejemplo vamos a hacer el cálculo de los coeficientes en un caso específico en el que es posible la evaluación de las integrales (4.249) y (4.250) de manera exacta. Tomemos las condiciones iniciales $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ y $g(\mathbf{r}) = 0$, es decir,

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = \delta(\mathbf{r}), \quad (4.255)$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = 0. \quad (4.256)$$

Con esto podemos apreciar inmediatamente que $B_{m, \ell} = 0$ para toda $m \in \mathbb{Z}$ y toda $\ell \in \mathbb{N}$. Por otro lado, los coeficientes $B_{m, \ell}$ también se pueden evaluar de manera directa por la

ocurrencia de la delta de Dirac dentro de la integración:

$$\begin{aligned} A_{m,\ell} &= \frac{1}{2\pi N_{m,\ell}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2\pi r} \delta(r) J_m \left(\alpha_{m,\ell} \frac{r}{a} \right) e^{-im\phi} r dr d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi N_{m,\ell}^2} J_m(0) \delta_{m,0} = \frac{1}{2\pi N_{m,\ell}^2} \delta_{m,0}, \end{aligned} \quad (4.257)$$

resultado que se desprende del hecho de que $J_m(0) = 1$ para $m = 0$ y $J_m(0) = 0$ para todo $m \neq 0$. Además, vale la pena resaltar que para obtener este resultado hicimos uso del hecho de que la delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$ se puede escribir en coordenadas polares como:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r). \quad (4.258)$$

Estos resultados nos muestran que gran parte de los elementos de la serie, correspondiente a la solución general (4.244), se anulan por la elección especial de estas condiciones iniciales. Esto deja la solución particular como:

$$\psi(r, \phi, t) = \frac{2}{2\pi a^2} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{J_0(\alpha_{0,\ell} r/a)}{J_1^2(\alpha_{0,\ell})} \cos(\omega_{0,\ell} t). \quad (4.259)$$

Vamos ahora a evaluar la función $\psi(r, \phi, t)$ para diferentes valores de sus variables r, ϕ y t para visualizar la forma de dicha función en el disco y observar, igualmente, su evolución a lo largo del tiempo. Tomaremos $a = 1$ y $c = 1$, y recordemos que $\omega_{0,\ell}$ está dado por:

$$\omega_{0,\ell} = k_{m,\ell} c := \frac{\alpha_{m,\ell} c}{a}, \quad (4.260)$$

así que, con esta elección de parámetros tenemos que

$$\omega_{0,\ell} = \alpha_{0,\ell}. \quad (4.261)$$

Esto quiere decir que las frecuencias involucradas en la evolución del campo $\psi(\mathbf{r})$ dependen de los ceros $\alpha_{0,\ell}$ de la función $J_0(x)$. Estos valores se pueden obtener de manera numérica, de hecho existen muchas librerías, en diversos lenguajes de programación, que ya cuentan con funciones que calculan estas cantidades. En el cuadro 4.5.1 se dan los valores de las primeras diez raíces de las funciones de Bessel de primer tipo, $J_m(x)$, para los primeros valores enteros no negativos.

Solo para tener a la vista la serie en su forma más simplificada, reescribiremos la expresión (4.259) haciendo las sustituciones de los parámetros elegidos:

$$\psi(r, \phi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{J_0(\alpha_{0,\ell} r)}{J_1^2(\alpha_{0,\ell})} \cos(\alpha_{0,\ell} t), \quad (4.262)$$

$\alpha_{m,\ell}$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
$\ell = 1$	2.404825	3.831705	5.135622	6.380161	7.588342	8.771483
$\ell = 2$	5.520078	7.015586	8.417244	9.761023	11.064709	12.338604
$\ell = 3$	8.653727	10.173468	11.619841	13.015200	14.372536	15.700174
$\ell = 4$	11.791534	13.323691	14.795951	16.223466	17.615966	18.980133
$\ell = 5$	14.930917	16.470630	17.959819	19.40941522	20.826932	22.217799
$\ell = 6$	18.071063	19.615858	21.116997	22.582729	24.019019	25.430341
$\ell = 7$	21.211636	22.760084	24.270112	5.748166	27.199087	28.6266184
$\ell = 8$	24.352471	25.903672	27.420573	28.908350	30.371007	31.811716
$\ell = 9$	27.493479	29.046828	30.569204	32.064852	33.537137	34.988781
$\ell = 10$	30.634606	32.189679	33.716519	35.218670	36.699001	38.159868

Cuadro 4.1: Ceros de las funciones de Bessel de primer tipo. El cuadro muestra las primeras diez raíces de $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$, $J_4(x)$ y $J_5(x)$. En este cuadro solo se resume el conjunto de raíces no nulas, recuérdese que las funciones $J_m(x)$ son tales que $J_m(0) = 0$ para todo entero $m > 0$.

la cual es una función que ya se puede evaluar numéricamente. Se deja al lector el ejercicio de evaluar esta expresión y analizar la evolución del campo de deformaciones en el disco.

4.5.2. Ecuación de onda en un dominio anular

Consideremos, ahora, el problema de la ecuación de onda en un dominio anular. Nuestro problema se origina cuando queremos describir las deformaciones de una hoja elástica de forma anular con sus perímetros fijos a alguna superficie rígida. Es decir, vamos a considerar el problema de describir las deformaciones de una “hoja de tambor anular”.

Si denotamos por $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(x, y, t)$ el campo de deformaciones de una hoja de tambor anular, la ecuación en derivadas parciales que describe la dinámica de $\psi(\mathbf{r}, t)$ viene dada por la ecuación de onda 2D, es decir,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.263)$$

siendo c^2 una constante que depende de las características del material. Como los extremos de la hoja de tambor están fijos, naturalmente, las condiciones de contorno en este caso se escriben como

$$\psi(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=a} = 0, \quad \psi(\mathbf{r}, t)|_{|\mathbf{r}|=b} = 0, \quad (4.264)$$

donde a es el radio interior de la hoja de tambor anular y b su radio exterior. Se debe notar que estas condiciones de contorno toman en cuenta que el sistema de referencia se

ha colocado de tal manera que el centro de la hoja anular coincide con el origen. Esto se aprecia mejor en la figura 4.9, en la que se muestra la ubicación de los ejes coordenados, así como los perímetros circulares que delimitan la hoja de tambor anular. Sobre dichos perímetros, el campo de deformaciones $\psi(\mathbf{r}, t)$ debe desaparecer, lo que corresponde a la condición física de que la hoja se encuentre fija en su periferia.

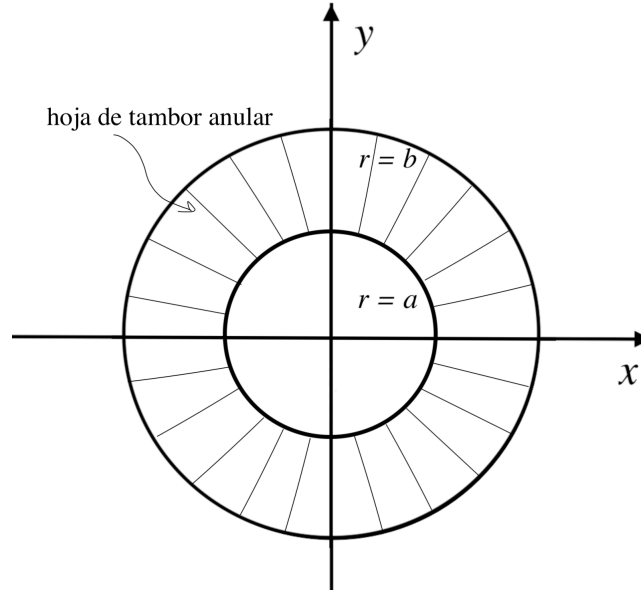


Figura 4.9: Representación abstracta de una hoja de tambor anular. De forma análoga al caso de la hoja de tambor, tenemos una hoja vibrante con forma circular pero con un hueco circular centrado en el origen, es decir, una geometría *anular*. Ahora tenemos dos condiciones de borde radiales: además de mantener fijo el contorno externo, se mantiene fijo el contorno interno.

Al igual que en el ejemplo anterior, vamos a escribir la función $\psi(\mathbf{r}, t)$ como una función que depende de las variables de coordenadas polares (r, ϕ) , esto es, $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r, \phi, t)$. La condiciones de contorno (4.264) se escriben, entonces, como

$$\psi(r = a, \phi, t) = 0, \quad \psi(r = b, \phi, t) = 0, \quad (4.265)$$

para todo $t > 0$ y toda $\phi \in [0, 2\pi)$. De igual manera, tal como lo hicimos en el ejercicio anterior, tenemos que imponer la condición siguiente,

$$\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t), \quad (4.266)$$

lo que debe ocurrir para cualquier $t > 0$, $r > 0$ y toda $\phi \in [0, 2\pi)$.

Además de las condiciones de contorno, es necesario establecer las condiciones iniciales. Como tenemos una ecuación de segundo orden en el tiempo, se debe contar con dos condiciones iniciales, las cuales vamos a escribir como,

$$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}), \quad (4.267)$$

$$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}), \quad (4.268)$$

donde $f(\mathbf{r}) = f(r, \phi)$ y $g(r, \phi)$ son dos funciones dadas.

En resumen, el problema que buscamos resolver es la ecuación de onda con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales siguientes:

Ecuación de onda 2D en un dominio anular (condiciones de frontera tipo Dirichlet)		
$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera $\psi(r = a, \phi, t) = 0,$ $\psi(r = b, \phi, t) = 0,$ $\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t),$	Condiciones iniciales $\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}),$ $\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}).$

Ya hemos visto anteriormente que al aplicar el método de separación de variables, con la hipótesis $\psi(r, \phi, t) = R(r)\Phi(\phi)T(t)$, en la ecuación de onda en coordenadas polares obtenemos las ecuaciones separadas,

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (-\lambda r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \quad (4.269)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (4.270)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - \lambda c^2 T = 0, \quad (4.271)$$

donde ν^2 y λ son las constantes de separación. De nueva cuenta, como ya vimos en el ejemplo anterior, la constante de separación ν se debe elegir como $m \in \mathbb{Z}$, de manera que el conjunto de soluciones se reduce a,

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi}, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}. \quad (4.272)$$

Otra cosa que ya sabemos de la solución del problema anterior es que las soluciones para la parte radial se puede escribir como una combinación lineal de las funciones de Bessel.

Recordando que debemos escribir la constante de separación λ como $\lambda = -k^2$, tenemos que las soluciones de la ecuación radial se puede escribir como

$$R(r) = c_1 J_m(kr) + c_2 N_m(kr). \quad (4.273)$$

A diferencia del problema de la hoja de tambor circular, en este caso, tanto la función de Bessel J_m como la función de Neumann se deben considerar como soluciones potenciales de la parte radial. Esto se debe a que el origen del sistema de referencia, el punto $r = 0$, ya no forma parte del dominio donde buscamos la solución. Así, el argumento de que la función de Neumann no es regular en $r = 0$, ya no puede aplicarse para descartarla de la ecuación (4.273).

Lo que sigue ahora es hallar los valores permitidos para la constante k . No es difícil observar que las condiciones de frontera (4.265) se traducen como condiciones para la parte radial de la forma,

$$R(a) = 0, \quad R(r = b) = 0. \quad (4.274)$$

Estas condiciones se pueden escribir como

$$R(a) = c_1 J_m(ka) + c_2 N_m(ka) = 0, \quad (4.275)$$

$$R(b) = c_1 J_m(kb) + c_2 N_m(kb) = 0. \quad (4.276)$$

Para satisfacer estas ecuaciones, debemos considerar una nueva función, de hecho, una combinación lineal de las funciones J_m y N_m como sigue. Primero, debemos notar que las condiciones anteriores se pueden escribir alternativamente como

$$c_1 J_m(ka) = -c_2 N_m(ka), \quad (4.277)$$

$$c_1 J_m(kb) = -c_2 N_m(kb), \quad (4.278)$$

y si dividimos las igualdades anteriores término a término, podemos ver que las constantes c_1 y c_2 se cancelan. Entonces, obtenemos que la constante k debe satisfacer la igualdad

$$\frac{J_m(ka)}{J_m(kb)} = \frac{N_m(ka)}{N_m(kb)}. \quad (4.279)$$

De manera equivalente, la ecuación anterior nos conduce a

$$J_m(ka)N_m(kb) - N_m(ka)J_m(kb) = 0. \quad (4.280)$$

Para hallar los valores de k debemos resolver la ecuación (4.280). Para este propósito, vamos a introducir una función, denotada por $F(x; \xi)$, definida como

$$F_m(x; \xi) := J_m(x)N_m(\xi x) - N_m(x)J_m(\xi x). \quad (4.281)$$

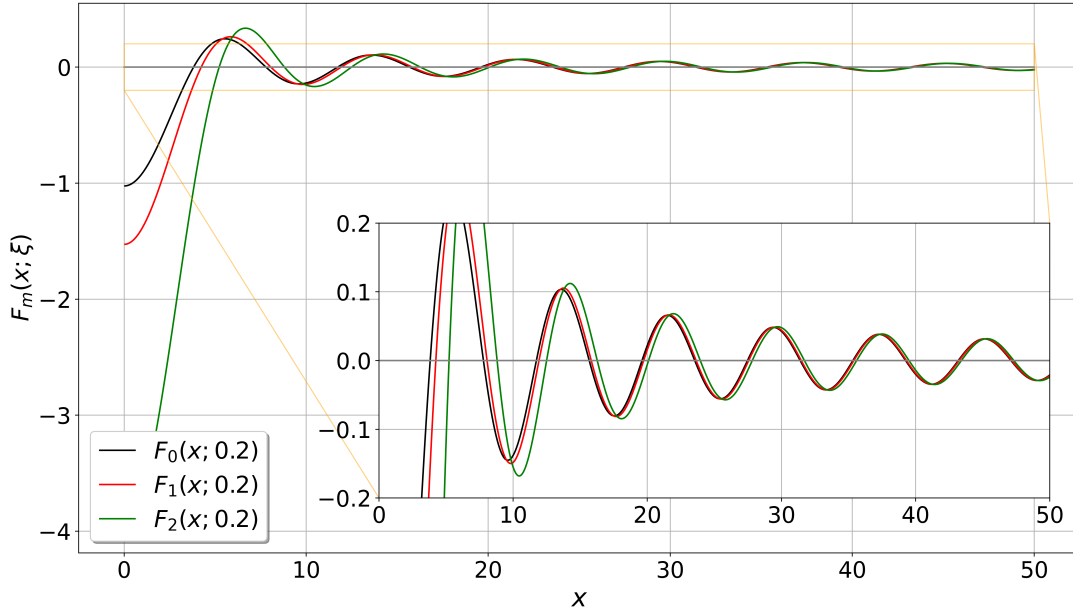


Figura 4.10: Las funciones $F_m(x; \xi)$ para $m = 0$, $m = 1$ y $m = 2$ con $\xi = 0.2$. La gráfica completa muestra cómo estas funciones decaen rápidamente a cero oscilando, pero permanecen finitas. Un acercamiento de la gráfica, indicando la sección ampliada con un recuadro naranja, nos permite visualizar mejor la ubicación de las raíces de estas funciones.

Es claro que las raíces de esta función nos dan los valores permitidos de la constante k . No es difícil darse cuenta de que $F_m(x; \xi)$ tiene infinitas raíces (lo que se puede notar recordando que J_m y N_m oscilan). En la figura (4.10), podemos apreciar gráficamente las oscilaciones de algunas de estas funciones.

Si denotamos por $\gamma_{m,\ell}$ el ℓ -ésimo cero de la función $F_m(x; \xi)$, esto es,

$$F_m(\gamma_{m,\ell}; \xi) = J_m(\gamma_{m,\ell})N_m(\xi\gamma_{m,\ell}) - N_m(\gamma_{m,\ell})J_m(\xi\gamma_{m,\ell}) = 0, \quad (4.282)$$

donde el parámetro ξ se toma como $\xi = b/a$, entonces, los valores permitidos de k viene dados por

$$k = k_{m,\ell} := \frac{\gamma_{m,\ell}}{a}. \quad (4.283)$$

Esta expresión se puede verificar por sustitución directa. Si escribimos $x = ka = \gamma_{m,\ell}$ y $\xi = a/b$, tenemos que

$$F_m\left(\gamma_{m,\ell}; \frac{b}{a}\right) = J_m(\gamma_{m,\ell})N_m\left(\gamma_{m,\ell}\frac{b}{a}\right) - N_m(\gamma_{m,\ell})J_m\left(\gamma_{m,\ell}\frac{b}{a}\right) = 0. \quad (4.284)$$

Se debe hacer notar que los ceros de la función $F_m(x; \xi)$ son, como es de esperarse, dependientes del parámetro $\xi = b/a$, o, dicho en otras palabras, $\gamma_{m,\ell} = \gamma_{m,\ell}(xi)$ es una función de ξ , algo que debe considerarse al calcular los valores permitidos de k .

Una vez que tenemos los valores de la constante de separación, podemos escribir el conjunto de funciones ortogonales que resulta de la teoría de Sturm-Liouville. En este punto, ya sabemos que la solución $R(r)$ puede escribirse como

$$R(r) = c_1 J_m(k_{m,\ell} r) + c_2 N_m(k_{m,\ell} r). \quad (4.285)$$

No obstante, se debe tener presente que las constantes c_1 y c_2 no son independientes, ya que se deben satisfacer las condiciones halladas anteriormente, esto es,

$$c_1 J_m(k_{m,\ell} a) = -c_2 N_m(k_{m,\ell} a), \quad (4.286)$$

$$c_1 J_m(k_{m,\ell} b) = -c_2 N_m(k_{m,\ell} b). \quad (4.287)$$

Estas ecuaciones no son linealmente independientes, así que basta con considerar solo una de las ecuaciones anteriores. Nótese que la constante c_2 puede escribirse como

$$c_2 = -\frac{J_m(k_{m,\ell} a)}{N_m(k_{m,\ell} a)} c_1. \quad (4.288)$$

Sustituyendo esta identidad en la ecuación (4.285), obtenemos

$$R(r) = c_1 J_m(k_{m,\ell} r) - c_1 \frac{J_m(k_{m,\ell} a)}{N_m(k_{m,\ell} a)} N_m(k_{m,\ell} r). \quad (4.289)$$

Como la constante c_1 es arbitraria por ahora, podemos escribirla de una manera particular para obtener una expresión elegante para la función $R(r)$. Vamos a escribir la constante c_1 como

$$c_1 = N_m(k_{m,\ell} a).$$

Nótese que las constantes de integración se incluirán más adelante, cuando se escriba la solución para la parte temporal. Con esto, la función $R(r)$ queda como

$$R_{m,\ell}(r) := N_m(k_{m,\ell} a) J_m(k_{m,\ell} r) - J_m(k_{m,\ell} a) N_m(k_{m,\ell} r). \quad (4.290)$$

Finalmente, ya que contamos con los valores permitidos de las constantes de separación, podemos proceder a obtener las soluciones dependientes del tiempo. Si escribimos $\omega_{m,\ell} = k_{m,\ell} c$, entonces, las soluciones $T(t)$ pueden escribirse como (cf. ec. (4.271)),

$$T(t) = A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell} t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell} t). \quad (4.291)$$

Con todo esto, tenemos que el conjunto de soluciones que resuelven la ecuación de onda con las condiciones de contorno propuestas se pueden escribir como

$$\psi_{m,\ell}(r, \phi, t) := R_{m,\ell}(r)e^{im\phi} \left[A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell}t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell}t) \right], \quad (4.292)$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$, y $\ell \in \mathbb{N}$.

De esta manera, la solución general del problema propuesto puede escribirse como

$$\psi(r, \phi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} R_{m,\ell}(r)e^{im\phi} \left[A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell}t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell}t) \right]. \quad (4.293)$$

Los coeficientes del desarrollo se pueden obtener en la forma usual: hacemos uso de las condiciones iniciales, evaluando la función y su derivada temporal en $t = 0$, e igualamos a las funciones dadas, tal como se establece en las ecuaciones (4.267) y (4.268). Realizando este procedimiento obtenemos

$$\psi(r, \phi, t = 0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} R_{m,\ell}(r)e^{im\phi} = f(r, \phi), \quad (4.294)$$

$$\partial_t \psi(r, \phi, t = 0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} R_{m,\ell}(r)e^{im\phi} = g(r, \phi). \quad (4.295)$$

En este punto conviene recordar que, puesto que las funciones $R_{m,\ell}(r)$ y $e^{im\phi}$ resultan de resolver problemas con la forma Sturm-Liouville, tienen la propiedad de ortogonalidad y completitud. Esto quiere decir que, dadas las funciones $f(r, \phi)$ y $g(r, \phi)$, siempre podemos obtener la correspondiente representación en serie como se indica a través de las ecuaciones (4.294) y (4.295) de manera única, que es la manifestación de la propiedad de completitud, mientras que los coeficientes del desarrollo se pueden obtener a través de la propiedad de ortogonalidad. Ya hemos visto anteriormente que las funciones $e^{im\phi}$ son ortogonales con la siguiente regla de ortogonalidad,

$$\int_0^{2\pi} e^{-im'\phi} e^{im\phi} d\phi = 2\pi \delta_{m',m}. \quad (4.296)$$

Por su parte, el conjunto de funciones $R_{m,\ell}$ tiene la propiedad de ortogonalidad que hemos desarrollado para las funciones de Bessel. En este caso, tenemos que

$$\int_a^b R_{m,\ell'}(r) R_{m,\ell}(r) r dr = C_{m,\ell}^2 \delta_{\ell',\ell}, \quad (4.297)$$

donde $C_{m,\ell}^2$ es la norma cuadrada de las funciones $R_{m,\ell}(r)$, esto es,

$$C_{m,\ell}^2 = \int_a^b R_{m,\ell}^2(r) r dr. \quad (4.298)$$

Para obtener los coeficientes del desarrollo vamos a multiplicar por $R_{m',\ell'}(r)e^{-im'\phi}$ las siguientes igualdades

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} = f(r, \phi), \quad (4.299)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} = g(r, \phi), \quad (4.300)$$

lo que nos lleva a

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} = R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} f(r, \phi), \quad (4.301)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} = R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} g(r, \phi). \quad (4.302)$$

Si ahora multiplicamos ambas expresiones por r (la función de peso) e integramos de a a b , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} r dr &= \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} f(r, \phi) r dr, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} r dr &= \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} g(r, \phi) r dr, \end{aligned}$$

lo que se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} A_{m,\ell} 2\pi C_{m,\ell}^2 \delta_{m',m} \delta_{\ell',\ell} &= \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} f(r, \phi) r dr, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \omega_{m,\ell} B_{m,\ell} 2\pi C_{m,\ell}^2 \delta_{m',m} \delta_{\ell',\ell} &= \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} g(r, \phi) r dr, \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso de las relaciones de ortogonalidad arriba expuestas. En las igualdades anteriores, podemos eliminar la suma debido a las deltas de Kronecker. Esto significa que

$$\begin{aligned} A_{m',\ell'} &= \frac{1}{2\pi C_{m',\ell'}^2} \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} f(r, \phi) r dr, \\ B_{m',\ell'} &= \frac{1}{\omega_{m',\ell'}} \frac{1}{2\pi C_{m',\ell'}^2} \int_a^b R_{m',\ell'}(r) e^{-im'\phi} g(r, \phi) r dr, \end{aligned}$$

que son las expresiones que buscábamos para los coeficientes del desarrollo.

Resumen de solución

Ecuación de onda 2D en un dominio anular $a \leq \|\mathbf{r}\| \leq b$
(condiciones de frontera tipo Dirichlet)

$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$	Condiciones de frontera	Condiciones iniciales
	$\psi(r = a, \phi, t) = 0,$	$\psi(\mathbf{r}, t = 0) = f(\mathbf{r}),$
	$\psi(r = b, \phi, t) = 0,$	$\partial_t \psi(\mathbf{r}, t = 0) = g(\mathbf{r}).$
	$\psi(r, \phi, t) = \psi(r, \phi + 2\pi, t),$	

La solución dada por separación de variables es:

$$\psi(r, \phi, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} R_{m,\ell}(r) e^{im\phi} \left[A_{m,\ell} \cos(\omega_{m,\ell} t) + B_{m,\ell} \sin(\omega_{m,\ell} t) \right], \quad (4.303)$$

con los coeficientes dados por:

$$A_{m,\ell} = \frac{1}{2\pi C_{m,\ell}^2} \int_a^b R_{m,\ell}(r) e^{-im\phi} f(r, \phi) r dr,$$

$$B_{m,\ell} = \frac{1}{\omega_{m,\ell}} \frac{1}{2\pi C_{m,\ell}^2} \int_a^b R_{m,\ell}(r) e^{-im\phi} g(r, \phi) r dr,$$

donde las funciones $R_{m,\ell}(r)$ se definen como:

$$R_{m,\ell}(r) := N_m(k_{m,\ell} a) J_m(k_{m,\ell} r) - J_m(k_{m,\ell} a) N_m(k_{m,\ell} r). \quad (4.304)$$

En este caso $C_{m,\ell}^2$ es la norma de las funciones $R_{m,\ell}(r)$:

$$C_{m,\ell}^2 = \int_a^b R_{m,\ell}^2(r) r dr, \quad (4.305)$$

y las constantes $k_{m,\ell}$ y $\omega_{m,\ell}$ vienen dadas en términos de los ceros la función $F_m(x; \xi)$:

$$F_m(x; \xi) := J_m(x) N_m(\xi x) - N_m(x) J_m(\xi x),$$

es decir:

$$k_{m,\ell} := \frac{\gamma_{m,\ell}}{a}, \quad \omega_{m,\ell} := k_{m,\ell} c, \quad \text{con } F_m\left(\gamma_{m,\ell}; \frac{b}{a}\right) = 0.$$

4.5.3. Ecuación de conducción de calor con difusividad térmica variable

Vamos ahora a ejemplificar el uso de las funciones de Bessel en un problema de conducción de calor de un material unidimensional con conductividad térmica que depende linealmente de la posición. La ecuación que queremos resolver es de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (4.306)$$

donde los valores de x se toman en el intervalo $[0, L]$ y la función $D(x)$ se asume de la forma $D(x) := ax + b$. Las condiciones de frontera que vamos a utilizar son las siguientes:

$$U(0, t) = U_0, \quad U(L, t) = U_1, \quad (4.307)$$

donde U_0 y U_1 son las temperaturas en los extremos del conductor de calor unidimensional de longitud L ⁵.

Nuestro objetivo es resolver la ecuación (4.306) como un desarrollo en serie de las funciones propias del problema. Ya hemos visto anteriormente que las condiciones de frontera que no son nulas nos obligan a buscar una solución particular. Esta solución debe ser tal que satisfaga las condiciones de frontera del problema, a fin de que, al replantear el problema tengamos condiciones iniciales homogéneas e idénticas a cero. Vamos a denotar por $u_{ss}(x)$ la solución particular que estamos buscando, la que, como podemos ver, es independiente del tiempo. Sustituyendo $u_{ss}(x)$ en la ecuación (4.306), obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{du_{ss}}{dx} \right) = 0. \quad (4.308)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver usando técnicas elementales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho no es difícil darse cuenta de que

$$u_{ss}(x) = q_0 \int_0^x \frac{dy}{D(y)} + c, \quad (4.309)$$

donde q_0 y c son constantes de integración que se fijarán con las condiciones en la frontera. Imponiendo las condiciones en la frontera (4.307), se puede ver directamente que las constantes q_0 y c toman la forma

$$c = U_0, \quad y \quad q_0 = \frac{U_1 - U_0}{N_0}, \quad (4.310)$$

⁵Este problema corresponde a un modelo de la conducción de calor en un medio no homogéneo. Esta ecuación es una simplificación del auténtico problema de la conducción de calor en un medio no homogéneo el cual se estudia, con mayor generalidad, en la referencia [52]. En el apéndice de la referencia mencionada se encuentran los cálculos, desarrollados por el autor, de la solución al problema aquí planteado.

donde N_0 se define como,

$$N_0 := \int_0^L \frac{dx}{D(x)}.$$

Si ahora recordamos la forma explícita de la función $D(x)$, podemos obtener una expresión explícita, en términos de funciones elementales, para la solución particular, esto es,

$$u_{ss}(x) = U_0 + (U_1 - U_0) \frac{\ln((ax + b)/b)}{\ln((aL + b)/b)}. \quad (4.311)$$

Procederemos a resolver la ecuación (4.306) para obtener el perfil de temperaturas $U(x, t)$ para cualesquiera condiciones iniciales. Para este fin debemos transformar el problema original en uno con condiciones de frontera homogéneas, escribimos, entonces,

$$U(x, t) := u_{ss}(x) + u(x, t). \quad (4.312)$$

Comencemos suponiendo que la función que buscamos, $u(x, t)$, se puede escribir como $u(x, t) = \rho(x)\tau(t)$, tal como lo indica la hipótesis de separación. Aplicando la técnica de separación de variables, sustituimos $u(x, t) = \rho(x)\tau(t)$ en la ecuación (4.306) para obtener las correspondientes ecuaciones separadas para ρ y τ . Dichas ecuaciones se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= -k^2\tau, \\ \frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d\rho}{dx} \right) &= -k^2\rho, \end{aligned} \quad (4.313)$$

donde hemos escrito la constante de separación como $\lambda = -k^2$. En lo que sigue, vamos a tomar la función $D(x)$ como el modelo lineal, esto es, $D(x) = ax + b$, donde a y b son constantes tales que $D(x) > 0$ para todo $x \in [0, L]$ ⁶.

No es difícil darse cuenta de que la solución para la parte temporal, $\tau(t)$, está dada por

$$\tau(t) := e^{-k^2 t}. \quad (4.314)$$

Por el contrario, la ecuación para la parte espacial no es tan fácil y directa de resolver como el problema para τ . No obstante, mostraremos que la ecuación (4.313) se puede resolver en términos de las funciones de Bessel. Para este propósito debemos hacer un cambio de variable de la siguiente forma

$$u = 2\sqrt{D(x)} = 2(ax + b)^{1/2}. \quad (4.315)$$

⁶Esta suposición obedece al hecho de que la difusividad térmica de un material debe ser positiva.

Este cambio de variable modifica la derivada respecto a x , como se muestra a continuación,

$$\frac{d}{dx} = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} = \frac{a}{(ax+b)^{1/2}} \frac{d}{du} = \frac{2a}{u} \frac{d}{du}. \quad (4.316)$$

La segunda derivada respecto a x se escribe, en consecuencia, como

$$\frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d}{dx} \right) = \frac{2a}{u} \frac{d}{du} \left(\frac{2au^2}{4u} \frac{d}{du} \right) = \frac{a^2}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{d}{du} \right). \quad (4.317)$$

Si denotamos por $\tilde{\rho}(u)$ la nueva función que se define por medio de $\rho(x)$ al cambiar la representación por la variable u , esto es, $\rho(x) = \tilde{\rho}(2(ax+b)^{1/2})$, entonces, la ecuación para $\tilde{\rho}(u)$ resulta en

$$\frac{a^2}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{d\tilde{\rho}}{du} \right) = -k^2 \tilde{\rho}. \quad (4.318)$$

Si denotamos por $\tilde{k}$ el cociente k/a , podemos ver que la ecuación anterior puede reescribirse como

$$u^2 \frac{d^2 \tilde{\rho}}{du^2} + u \frac{d\tilde{\rho}}{du} + k^2 \tilde{\rho} = 0, \quad (4.319)$$

que es la *ecuación de Bessel de orden cero*. Ya sabemos que esta ecuación tiene como soluciones la función de Bessel de orden cero J_0 y la función de Neumann (la función de Bessel de segundo tipo) de orden cero igualmente, es decir, N_0 . De manera explícita, la pareja de soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.319) se pueden escribir, hasta en una constante de integración, como

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1(u) &= J_0(\tilde{k}u), \\ \tilde{\rho}_2(u) &= N_0(\tilde{k}u). \end{aligned} \quad (4.320)$$

Y si escribimos las soluciones de la ecuación original (4.313) para la función $\rho(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= J_0 \left(\frac{2k}{a} \sqrt{ax+b} \right), \\ \rho_2(x) &= N_0 \left(\frac{2k}{a} \sqrt{ax+b} \right). \end{aligned} \quad (4.321)$$

Es claro que cualquier combinación lineal de ρ_1 y ρ_2 es, en principio, una solución a la ecuación (4.313), esto es,

$$\rho(x) = AJ_0 \left(\frac{2k}{a} \sqrt{ax+b} \right) - BN_0 \left(\frac{2k}{a} \sqrt{ax+b} \right), \quad (4.322)$$

donde A y B son constantes de integración que se determinarán a partir de las condiciones del problema. Es menester mencionar que el signo de la constante B se ha elegido por mera conveniencia, como lo veremos más adelante.

El siguiente paso es obtener los valores permitidos para la constante de separación k de nuestro problema. Debemos notar que las condiciones en la frontera para la función $u(x, t)$ son homogéneas e iguales a cero, mientras que la función $u_{ss}(x)$ se encarga de satisfacer las condiciones de frontera originales. Esto quiere decir que

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \forall x \in [0, L]. \quad (4.323)$$

Estas condiciones las podemos usar para obtener las correspondientes condiciones en la frontera para la función $\rho(x)$. De hecho, no es difícil notar que las condiciones que debe cumplir $\rho(x)$ se escriben como,

$$\rho(0) = 0, \quad \rho(1) = 0. \quad (4.324)$$

De esta manera, podemos observar que se deben satisfacer las siguientes condiciones para eventualmente hallar los valores permitidos para k ,

$$AJ_0\left(\frac{2k\sqrt{b}}{a}\right) = BN_0\left(\frac{2k\sqrt{b}}{a}\right), \quad (4.325)$$

$$AJ_0\left(\frac{2k}{a}\sqrt{a+b}\right) = BN_0\left(\frac{2k}{a}\sqrt{a+b}\right). \quad (4.326)$$

Ahora, si denotamos por c y ξ las constantes

$$c := \frac{2k\sqrt{b}}{a}, \quad \xi := \sqrt{\frac{a+b}{b}}, \quad (4.327)$$

podemos ver que las condiciones (4.325) y (4.326) pueden escribirse de la forma

$$AJ_0(c) = BN_0(c), \quad (4.328)$$

$$AJ_0(\xi c) = BN_0(\xi c). \quad (4.329)$$

Debemos notar que las condiciones anteriores se pueden combinar en una sola ecuación si multiplicamos el lado izquierdo de la ecuación (4.328) por el lado derecho de la igualdad (4.329) y viceversa. Este procedimiento nos da como resultado

$$J_0(c) N_0(\xi c) = J_0(\xi c) N_0(c). \quad (4.330)$$

Es importante observar que esta operación resulta en una condición que no depende de las constantes de integración A y B . En consecuencia, la condición (4.330) es una expresión que permite obtener los valores permitidos de la constante de separación k a través de la variable c en dicha ecuación. No es difícil darse cuenta de que la ecuación (4.330) tiene

infinitas soluciones para c , las cuales denotaremos por c_ℓ para $\ell \in \mathbb{N}$. En otras palabras, podemos decir que c_ℓ representa la ℓ -ésima raíz de la función,

$$f(x) := J_0(x) N_0(\xi x) - J_0(\xi x) N_0(x). \quad (4.331)$$

Las raíces de la función $f(x)$ no se pueden escribir de manera exacta en forma analítica, sin embargo, los valores c_ℓ se pueden obtener de manera numérica como las raíces de $f(x)$. De acuerdo con Abramowitz y Stegun [1], los valores de c_ℓ se pueden aproximar por

$$c_\ell \approx \frac{\ell\pi}{\xi - 1} - \frac{\xi - 1}{8\xi\pi} \frac{1}{\ell} + O(\ell^{-3}), \quad (4.332)$$

para ℓ suficientemente grande.

Una vez que se tienen los valores c_ℓ podemos escribir explícitamente los valores admitidos de k . En efecto, recordando la definición de la constante c de la ecuación (4.327), tenemos que

$$k_\ell = \frac{ac_\ell}{2\sqrt{b}}. \quad (4.333)$$

Notemos ahora que en virtud de las igualdades (4.328) y (4.329), tenemos que las constantes A y B no son independientes una de otra. De hecho, la ecuación (4.328) nos muestra directamente que

$$B = A \frac{J_0(c_\ell)}{N_0(c_\ell)}. \quad (4.334)$$

Esta última identidad nos permite escribir la solución dada a través de la ecuación (4.322) como

$$\rho_\ell(x) = A_\ell \left[J_0 \left(\frac{2k_\ell}{a} \sqrt{ax+b} \right) - \frac{J_0(c_\ell)}{N_0(c_\ell)} N_0 \left(\frac{2k_\ell}{a} \sqrt{ax+b} \right) \right], \quad (4.335)$$

para cada $\ell \in \mathbb{N}$. Notemos además que la expresión (4.335) puede reescribirse por mera conveniencia como

$$\rho_\ell(x) = C_\ell \left[N_0(c_\ell) J_0 \left(c_\ell \sqrt{\frac{ax+b}{b}} \right) - J_0(c_\ell) N_0 \left(c_\ell \sqrt{\frac{ax+b}{b}} \right) \right], \quad (4.336)$$

donde C_ℓ es una constante de integración que se determinará a partir de las condiciones iniciales [7]. Esta forma de la solución para ρ_ℓ nos permite ver directamente que se cumplen las condiciones en la frontera $\rho_\ell(0) = \rho_\ell(1) = 0$.

En este punto, es importante mencionar que la colección de funciones definida por

$$\mathcal{B} := \left\{ R_\ell(x) := N_0(c_\ell) J_0 \left(c_\ell \sqrt{\frac{mx+b}{b}} \right) - J_0(c_\ell) N_0 \left(c_\ell \sqrt{\frac{ax+b}{b}} \right) : \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

⁷Nótese que en realidad hemos definido $C_\ell := A_\ell/N_0(c_\ell)$.

forma un conjunto completo de funciones ortogonales, algo que se desprende del hecho de que estas funciones son soluciones de un problema con la forma Sturm-Liouville. Esto quiere decir que si tomamos $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$\int_0^1 R_\ell(x) R_{\ell'}(x) dx = M_\ell^2 \delta_{\ell, \ell'}, \quad (4.337)$$

donde M_ℓ^2 es la norma cuadrada de las funciones $R_\ell(x)$, es decir,

$$M_\ell^2 := \int_0^1 R_\ell^2(x) dx. \quad (4.338)$$

Todo esto nos permite escribir la solución general para $U_{\text{tr}}(x, t)$ como un desarrollo en serie de las funciones $R_\ell(x)$. Recordando la solución para la parte temporal $\tau(t)$ dada en la ecuación (4.314), podemos ver que

$$U_{\text{tr}}(x, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} C_\ell R_\ell(x) \exp\left(-\frac{a^2 c_\ell^2 t}{4b}\right). \quad (4.339)$$

Si ahora denotamos por $g(x)$ el perfil de temperatura al tiempo $t = 0$, es decir, $g(x) := U(x, t = 0)$, la condición inicial para la función $U_{\text{tr}}(x, t)$ está dada por

$$U_{\text{tr}}(x, t = 0) = g(x) - U_{\text{ss}}(x) =: \tilde{g}(x). \quad (4.340)$$

Entonces, los coeficientes C_ℓ se pueden obtener, como es usual, a partir de la propiedad de ortogonalidad de las funciones $R_\ell(x)$ como sigue,

$$C_\ell = \frac{1}{M_\ell} \int_0^1 \tilde{g}(x) R_\ell(x) dx. \quad (4.341)$$

4.6. Ejercicios

1. A partir de la función generatriz de las funciones de Bessel,

$$G(x, t) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n,$$

muestra que

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2k}.$$

2. Muestra que

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

3. Usa la función generatriz de las funciones de Bessel para mostrar que

$$J_n(u+v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(u) J_{n-m}(v).$$

4. A partir de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x),$$

muestra que

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}, \quad \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^{-n} J_{n+1}.$$

5. Usa el método de separación de variables para obtener las ecuaciones separadas correspondientes de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas polares y en coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} i) \quad & \nabla^2 \psi = k^2 \psi, \\ ii) \quad & \nabla^2 \psi = 0, \\ iii) \quad & D \nabla^2 \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Recuerda que las coordenadas polares son (r, ϕ) y las cilíndricas son (r, ϕ, z) . Observa también que k^2 y D son constantes.

6. Muestra las siguientes identidades

$$\begin{aligned} J_\nu N'_\nu - J'_\nu N_\nu &= \frac{2}{\pi x}, \\ J_\nu J_{-\nu-1} - J_{-\nu} N_{\nu+1} &= -\frac{2 \sin(\pi \nu)}{\pi x}, \\ J_\nu \left(\frac{d}{dx} H_\nu^{(1)} \right) - \left(\frac{d}{dx} J_\nu \right) H_\nu^{(1)} &= \frac{2i}{\pi x}. \end{aligned} \quad (4.342)$$

Para probar estas identidades haz uso del wronskiano de J_ν y $J_{-\nu}$, esto es,

$$J_\nu J'_{-\nu} - J'_\nu J_{-\nu} = -\frac{2 \sin(\pi \nu)}{\pi x},$$

así como las relaciones de recurrencia.

7. Muestra, por sustitución directa, que N_n , la función de Neumann, es solución de la ecuación de Bessel. Recuerda que

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} \right].$$

8. Muestra que

$$\int_0^{2\pi} \sin(x \sin(\theta)) d\theta = 0.$$

9. Muestra, por sustitución directa en la ecuación de Bessel con $\nu = 0$, que la integral

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(x \cosh(t)) dt,$$

es una solución de la ecuación de Bessel.

Muestra, además, que esta integral es linealmente independiente de J_0 , calculando el wronskiano $W(J_0, y)$. Para esto haz uso de la representación integral de J_0 ,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d\theta.$$

10. Muestra que la función de Bessel modificada de segundo tipo $K_\nu(z)$ puede representarse como

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z \cosh(t) - \nu t} dt.$$

11. Muestra que las funciones de Hankel satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} H_\nu^{(1)}(x) &= H_{\nu-1}^{(1)}(x) - H_{\nu+1}^{(1)}(x), \\ \frac{2\nu}{x} H_\nu^{(2)}(x) &= H_{\nu-1}^{(1)}(x) + H_{\nu+1}^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Para este propósito, haz uso de las relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel de primer y segundo tipo,

$$\begin{aligned} 2Z_\nu(x) &= Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x), \\ \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x) &= Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

donde Z_ν es la función de Bessel J_ν , o bien, la función de Neumann N_ν .

12. Muestra que el wronskiano entre las funciones de Bessel modificadas tiene la forma

$$I_\nu K'_\nu - I'_\nu K_\nu = -\frac{1}{x}.$$

13. Demuestra las identidades:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\pi e^{\pm z \cos(\theta)} \sin^{2\nu}(\theta) d\theta, \\ \text{(ii)} \quad I_\nu(z) &= \frac{1}{\pi^{1/2} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{\pm zx} (1-x^2)^{\nu-1/2} dx, \\ \text{(iii)} \quad K_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \sinh^{2\nu}(t) dt, \\ \text{(iv)} \quad K_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zx} (x^2-1)^{\nu-1/2} dx, \\ \text{(v)} \quad K_\nu(z) &= \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt. \end{aligned}$$

14. Considere un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ definido como

$$D = \{(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \phi \leq \gamma\}, \quad (4.343)$$

siendo a un real positivo y γ un ángulo entre 0 y 2π . Un ejemplo de un dominio como este es el que se muestra en la figura [4.11](#). Sobre el dominio D buscamos la solución de la ecuación de onda

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (4.344)$$

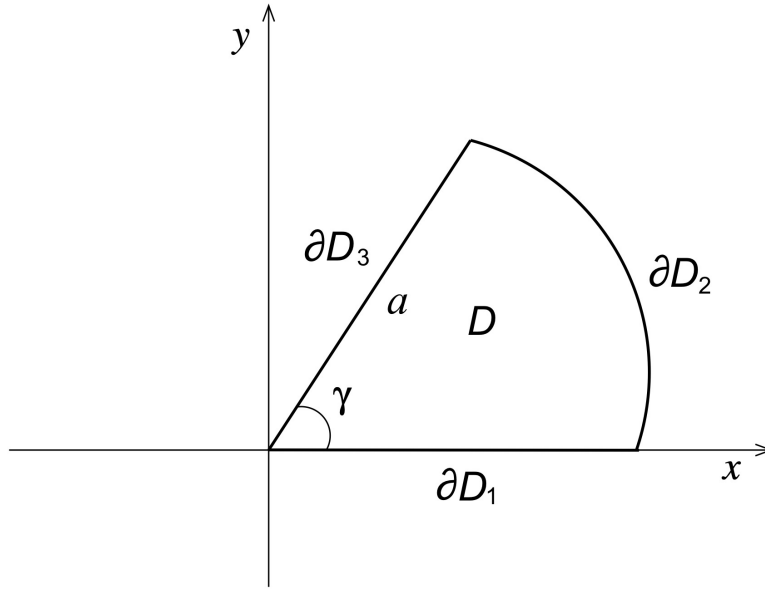


Figura 4.11: Dominio D del plano $\mathbb{R}^2$ del ejercicio 14. El dominio D es, esencialmente, un disco de radio a cortado a un ángulo fijo γ como una rebanada de pastel. La pared ∂D_1 corresponde a las coordenadas polares: $\{(r, \phi) : \phi = 0, \text{ y } 0 \leq r \leq a\}$. La pared ∂D_2 es el semi-arco definido como: $\{(r, \phi) : r = a, \text{ y } 0 \leq \phi \leq \gamma\}$ mientras que la pared ∂D_3 corresponde a las coordenadas: $\{(r, \phi) : \phi = \gamma, \text{ y } 0 \leq r \leq a\}$.

con las condiciones de frontera

$$\psi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in \partial D_1} = 0, \quad \psi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in \partial D_2} = 0, \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{r} \in \partial D_3} = 0, \quad (4.345)$$

siendo ∂D_1 , ∂D_2 y ∂D_3 las fronteras del dominio D , tal como se ilustra en la figura 4.11.

Usa el método de separación de variables para hallar el campo de deformaciones $\psi(\mathbf{r}, t)$ en el dominio D con las condiciones de frontera especificadas y con las condiciones iniciales:

$$\psi(r, \phi, t = 0) = f(r, \phi), \quad \text{y} \quad \partial_t \psi(r, \phi, t = 0) = g(r, \phi). \quad (4.346)$$

15. Considera la ecuación de difusión en dos dimensiones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (4.347)$$

sobre un dominio circular (un disco) C de radio a , esto es, $C = \{\mathbf{r} : \|\mathbf{r}\| \leq a\}$. En este caso, las partículas se difunden sobre el disco C y en la pared rebotan elásticamente, lo que se modela con las condiciones de frontera tipo Neumann:

$$\nabla_{\mathbf{n}}^2 \rho(\mathbf{r}, t)|_{\|\mathbf{r}\|=a}, \quad (4.348)$$

donde $\nabla_n^2 \rho$ denota el gradiente de la densidad de partículas $\rho(\mathbf{r}, t)$ a lo largo de la dirección perpendicular a la frontera del disco, ∂C . Como se ha mencionado anteriormente, estas condiciones de frontera corresponden a suponer que la frontera del disco es una *pared reflejante*. Resuelve la ecuación de difusión con estas condiciones de frontera y con la condición inicial tipo delta de Dirac,

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (4.349)$$

siendo $\mathbf{r}_0$ un punto cualquiera en el interior del disco C , i.e., $\|\mathbf{r}_0\| < a$.

16. Considera la ecuación de difusión del ejercicio 15 igualmente sobre un dominio circular de radio a . En este caso, se van a imponer condiciones de frontera de tipo *absorbente*, es decir, en la frontera del disco se impone la condición de frontera de Dirichlet siguiente:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=a}, \quad (4.350)$$

Resuelve la ecuación de difusión con esta condición de frontera y con la condición inicial tipo delta de Dirac:

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (4.351)$$

siendo $\mathbf{r}_0$ un punto fijo en el interior del disco C , i.e., $\|\mathbf{r}_0\| < a$.

$$\nabla_n^2 \rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{\|\mathbf{r}\|=a}, \quad (4.352)$$

Muestra que a tiempo infinito la densidad de partículas se va a cero, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4.353)$$

¿Con qué rapidez se vacía el disco?

17. Resuelve la ecuación de difusión de partículas,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (4.354)$$

sobre el dominio tipo “rebanada de pastel” mostrado en la figura 4.11. Para este propósito, hay que suponer que la frontera del dominio es de tipo reflejante, es decir, se cumplen las condiciones de frontera tipo Neumann:

$$\nabla_n^2 \rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial D_1} = 0, \quad \nabla_n^2 \rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial D_2} = 0, \quad \text{y} \quad \nabla_n^2 \rho(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r} \in \partial D_3} = 0. \quad (4.355)$$

Hay que suponer, además, que las condiciones iniciales son dadas por una delta de Dirac

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (4.356)$$

siendo $\mathbf{r}_0$ un punto cualquiera en el interior del D . Muestra que a tiempo infinito la densidad de partículas se hace constante. ¿Con qué rapidez se alcanza ese estado?

18. La distribución K de Bessel es una distribución de probabilidad que resulta de multiplicar una variable aleatoria con distribución gamma con una distribución normal. Esta distribución es conocida desde hace tiempo y ha sido empleada ampliamente en matemáticas financieras para modelar la volatilidad de los precios de activos [32, 40, 58] mediante un modelo conocido como *varianza gamma*. Recientemente, esta distribución se ha redescubierto en física estadística para estudiar propiedades de no gaussianidad de modelos de reinicio estocástico [50, 59]. En realidad, la distribución K de Bessel fue inicialmente introducida en 1957 por Teichroew [60]. Un estudio sistemático de la distribución K de Bessel se puede hallar en referencia [34], en la que una versión de dicha distribución se define como [8]:

$$f_{KB}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha-\frac{1}{2}}} \frac{1}{b \Gamma(\alpha)} \left(\frac{|x|}{b} \right)^{\alpha-\frac{1}{2}} K_{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{|x|}{b} \right), \quad (4.357)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ es una constante denominada *agudeza* de la distribución, y b es un parámetro que controla la *dispersión* (o “ancho”) de la distribución.

- a) Muestra que la distribución K de Bessel está normalizada, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{KB}(x) dx = 1. \quad (4.358)$$

- b) Calcula el n -ésimo momento.

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_{KB}(x) dx. \quad (4.359)$$

⁸Esta definición también se puede consultar en referencia [3], en la que la distribución K de Bessel se aplicó en el contexto de sistemas financieros para entender las propiedades estadísticas de rendimientos logarítmicos de criptoactivos.

Capítulo 5

Funciones esféricas

En este capítulo abordaremos el problema de la ecuación de onda en 3D en coordenadas polares. Cuando implementamos la técnica de separación de variables obtenemos algunas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se escribirán en términos de lo que se conoce como las funciones asociadas de Legendre y las funciones de Bessel esféricas.

5.1. Separación de variables III

Como hemos visto anteriormente, la técnica de separación de variables nos ha servido para resolver ecuaciones en derivadas parciales en una y dos dimensiones con condiciones de frontera y condiciones iniciales. Veremos ahora que lo mismo sucede cuando enfrentamos un problema en tres dimensiones en una geometría esférica. Como en los casos anteriores, vamos a considerar la ecuación de onda, aunque el método de solución así como las funciones que se originan pueden ser aplicados a otra clase de problemas.

5.1.1. La ecuación de onda en coordenadas esféricas

Consideremos la ecuación de onda en tres dimensiones. Una ecuación de este tipo puede modelar, por ejemplo, las vibraciones ψ de un material esférico (muy parecido al problema del “tambor” visto en la sección [4.5.1](#)). Esta ecuación se escribe como

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

donde $\psi(\mathbf{r}, t)$ son las vibraciones del material y c una constante que usualmente se interpreta como la velocidad de las ondas.

En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , la ecuación de onda también puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (5.2)$$

Vamos ahora a aplicar el método de separación de variables. Si suponemos que el campo de vibraciones $\psi(r, \theta, \phi, t)$ puede escribirse como un producto de funciones como $\psi(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$, entonces, obtenemos que

$$\frac{\Theta\Phi T}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi T}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta T}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{R\Theta\Phi}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad (5.3)$$

donde hemos sacado de las derivadas las funciones que dependen de una variable respecto de la cual se está derivando y, en consecuencia, hemos sustituido las derivadas parciales por derivadas totales. Si dividimos entre $R\Theta\Phi T$ la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (5.4)$$

En este punto ya podemos separar la función T que depende del tiempo. Como el lado derecho de la ecuación (5.4) solo depende de la variable temporal, podemos decir que ambos lados de la igualdad son idénticos a una constante, nuestra primera constante de separación que llamaremos λ . En consecuencia podemos escribir,

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda c^2 T, \quad (5.5)$$

y también tenemos que

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda. \quad (5.6)$$

La siguiente ecuación que vamos a separar corresponde a una ecuación diferencial para Φ . Si multiplicamos la igualdad (5.6) por $r^2 \sin^2(\theta)$ podemos ver que

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda r^2 \sin^2(\theta), \quad (5.7)$$

o equivalentemente,

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \lambda r^2 \sin^2(\theta) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}. \quad (5.8)$$

Ahora, como el miembro derecho de la ecuación (5.8) depende solo de ϕ , mientras que el miembro izquierdo no depende de dicha variable, entonces, podemos decir que ambos lados de la igualdad son iguales a una constante, nuestra segunda constante de separación, que llamaremos ν^2 . Con esto obtenemos la ecuación separada para Φ que se escribe como

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \nu^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\nu^2\Phi(\phi). \quad (5.9)$$

Ya hemos visto en casos anteriores que para satisfacer la propiedad de periodicidad de la función Φ es indispensable hacer que la variable ν tome valores enteros, esto es $\nu = m \in \mathbb{Z}$. En el desarrollo subsecuente vamos a escribir $\nu = m$ para indicar que tomaremos valores enteros para esa constante de separación, por lo que la ecuación separada para Φ queda como

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi(\phi). \quad (5.10)$$

De esa misma ecuación (5.9) también obtenemos (nótese que hemos escrito m en lugar de ν)

$$\frac{\sin^2(\theta)}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin(\theta)}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \lambda r^2 \sin^2(\theta) = m^2. \quad (5.11)$$

Ahora, para separar el último par de funciones vamos a dividir la ecuación (5.11) entre $\sin^2(\theta)$, lo que nos lleva a la siguiente igualdad,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \lambda r^2 = \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}, \quad (5.12)$$

misma que se puede reescribir como

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda r^2 = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2(\theta)}. \quad (5.13)$$

Ahora, como ambos lados de la igualdad anterior dependen de variables independientes, entonces, deben ser iguales a una constante, nuestra tercera constante de separación, que denotaremos por μ . Esto nos lleva a las siguientes ecuaciones diferenciales para las funciones R y Θ :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda r^2 = \mu, \quad (5.14)$$

$$-\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} = \mu. \quad (5.15)$$

En las secciones subsecuentes, podremos ver que este par de ecuaciones nos conducen a funciones especiales que son de mucho interés en la física matemática: las funciones de Bessel esféricas para la parte radial y los polinomios de Legendre así como las funciones asociadas de Legendre cuando se hace el tratamiento de la ecuación para la variable θ .

La ecuación (5.15), obtenida para la parte angular en la variable θ , puede escribirse como sigue

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0. \quad (5.16)$$

Nuestro objetivo ahora es resolver esta ecuación diferencial. Para este propósito vamos a reescribirla mediante el siguiente cambio de variable, $x = \cos(\theta)$. Esto es, vamos a suponer que la función que estamos buscando, $\Theta(\theta)$ puede escribirse como una función $P(x)$ que depende únicamente de $x = \cos(\theta)$, i.e., $\Theta(\theta) = P(\cos(\theta))$. Para hallar la ecuación que satisface $P(x)$, observemos que las derivadas respecto a x y θ se relacionan entre sí como

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta},$$

y también podemos apreciar que

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d}{d\theta} \right) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right) = \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right).$$

Haciendo este cambio de variable, notamos que la ecuación (5.16) se transforma en una ecuación diferencial para $P(x)$ de la forma

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0. \quad (5.17)$$

5.2. Polinomios de Legendre

A continuación, nuestro objetivo será resolver la ecuación diferencial (5.17). Sin embargo, antes de resolver dicha ecuación vamos a considerar el caso especial $\nu = 0$, y con las soluciones a ese problema particular, aplicando el método de Frobenius, construiremos, posteriormente, las soluciones para $\nu \neq 0$.

5.2.1. La ecuación de Legendre

La ecuación (5.17) con $\nu = 0$ se escribe de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \mu P(x) = 0. \quad (5.18)$$

Vamos ahora a aplicar el método de Frobenius para obtener una solución en serie de potencias de la ecuación (5.18). Antes de proceder recordemos que la constante μ aún no está fija, es una constante de separación que resulta de aplicar el método de separación de variables, por lo que puede, en principio, tomar cualquier valor. No obstante, durante este proceso vamos a darnos cuenta de que esta constante de separación está restringida, y obtendremos los valores permitidos para dicha constante de separación.

Supongamos que la función $P(x)$ puede escribirse como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \quad (5.19)$$

Vamos a sustituir esta expresión para $P(x)$ en la ecuación (5.18), por lo que conviene ver cómo son las siguientes derivadas de dicha función,

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k k x^{k-1}, \quad (5.20)$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1) x^{k-2}, \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dP}{dx} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k k(k+1) x^k. \quad (5.22)$$

Con todo esto no es difícil notar que la ecuación (5.18) puede escribirse como

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1) x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k k(k+1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mu C_k x^k = 0. \quad (5.23)$$

Con la finalidad de que las series estén escritas por potencias en común, vamos a hacer un corrimiento de índices en el primer término de la ecuación anterior. Vamos a sustituir k por $n+2$, de modo que el índice n corre desde $n=0$ hasta infinito. Esto es claro ya

que el índice de sumación k corre desde $k = 2$ hasta infinito. Con estas indicaciones, es posible ver que

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1)x^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1)x^n. \quad (5.24)$$

De este modo podemos notar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} C_k k(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \mu C_k x^k = 0, \quad (5.25)$$

lo que se puede reescribir como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[C_{k+2}(k+2)(k+1) - C_k k(k+1) + \mu C_k \right] x^k + 2C_2 + \mu C_0 = 0. \quad (5.26)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla, debemos hacer que los coeficientes del desarrollo sean todos cero y que los términos fuera de las series sean cero igualmente. Lo anterior es consecuencia de la independencia lineal del conjunto de funciones $\{x^k : k \in \mathbb{N}_0\}$. De esta forma podemos escribir

$$2C_2 + \mu C_0 = 0, \quad (5.27)$$

$$C_{k+2}(k+2)(k+1) - C_k k(k+1) + \mu C_k = 0. \quad (5.28)$$

Vamos a dejar reservada la igualdad (5.27) y vamos a concentrarnos en la ecuación de recurrencia (5.28) para los coeficientes C_k . Claramente podemos ver que

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1) - \mu}{(k+2)(k+1)} C_k, \quad (5.29)$$

o bien,

$$\frac{C_{k+2}}{C_k} = \frac{k(k+1) - \mu}{(k+2)(k+1)}. \quad (5.30)$$

En esta última expresión, observamos que, cuando $k \rightarrow \infty$, el cociente C_{k+2}/C_k se va a uno para cualquier valor de μ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_{k+2}}{C_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(k+1) - \mu}{(k+2)(k+1)} \quad (5.31)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+2} - \frac{\mu}{(k+2)(k+1)} \right) = 1. \quad (5.32)$$

De acuerdo con el criterio de la razón para la convergencia de series, para que la serie (5.19) converja, es suficiente que el límite $\lim_{k \rightarrow \infty} C_{k+2}/C_k < 1$. Desafortunadamente, vemos que el límite mencionado es igual a uno, y el criterio de d'Alembert falla para decirnos con certeza si la serie converge o diverge. No obstante, el criterio generalizado del cociente [30] muestra que, efectivamente, la serie (5.19) es divergente.

Para evitar este problema, vamos a hacer la elección apropiada de la constante de separación μ para que la serie sea finita. Es decir, vamos a proponer que para determinados valores de μ , la serie sea finita y, en consecuencia la soluciones a la ecuación (5.18) sean polinomios. Esto es posible si tomamos el valor de μ como un entero de la forma $\mu = n(n+1)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Notemos que esta elección hace que la recurrencia (5.29) tenga una cantidad finita de elementos no nulos. Esto se puede comprobar si escribimos dicha ecuación de recurrencia con $\mu = n(n+1)$, la cual queda como

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+2)(k+1)} C_k. \quad (5.33)$$

Notemos que si hacemos $k = n(n+1)$ tenemos que el coeficiente $C_{n+2} = 0$ sin importar cuál es el valor de C_n . Es suficientemente claro que si n es par, entonces, todos los coeficientes pares por encima de n son nulos debido a la ecuación de recurrencia (5.36). Lo mismo sucedería con los k impares si n fuese impar. Notemos, además, que si hacemos $k = 0$ en (5.36) obtenemos la igualdad (5.27), por lo que no tenemos que considerar dicha igualdad como otro requisito que satisfacer, pues ya está contenida en (5.36).

En cambio, la ecuación (5.36) nos da valores no nulos para $0 \leq k \leq n$ si la condición inicial C_0 o C_1 son diferentes de cero. Vamos a proceder a resolver dicha ecuación de recurrencia, pero la escribiremos primero en la forma

$$C_k = \frac{(k-2)(k-1) - n(n+1)}{k(k-1)} C_{k-2}, \quad (5.34)$$

donde hemos sustituido k por $k-2$. Notemos ahora que la cantidad $(k-2)(k-1) - n(n+1)$ puede ser escrita como

$$(k-2)(k-1) - n(n+1) = -(n-k+2)(n+k-1),$$

lo cual nos permite reescribir la igualdad (5.35) como

$$C_k = -\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)} C_{k-2}. \quad (5.35)$$

Observemos, además, que la recurrencia anterior define a los coeficientes pares, o bien, a los coeficientes impares, independientemente. Vamos a suponer por el momento que

queremos obtener los coeficientes pares, por lo que definiremos los coeficientes a_k como $a_k := C_{2k}$ con n par, por lo que también vamos a sustituir n por $2n$. De esta manera obtenemos que la recurrencia para a_k se escribe como

$$a_k = -\frac{(2n-2k+2)(2n+2k-1)}{(2k)(2k-1)}a_{k-1}. \quad (5.36)$$

Para resolver la recurrencia vamos a escribir la igualdad anterior sustituyendo k por $k-1$, luego sustituyendo k por $k-2$, y así sucesivamente. Haciendo esto obtenemos

$$\begin{aligned} a_{k-1} &= -\frac{(2n-2k+4)(2n+2k-3)}{(2k-2)(2k-3)}a_{k-2}, \\ a_{k-2} &= -\frac{(2n-2k+6)(2n+2k-5)}{(2k-4)(2k-5)}a_{k-3}, \\ a_{k-3} &= -\frac{(2n-2k+8)(2n+2k-7)}{(2k-6)(2k-7)}a_{k-4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

de tal manera que

$$a_k = (-1)^k \frac{[(2n-2k+2)(2n-2k+4)\cdots(2n)] \cdot [(2n+2k-1)(2n+2k-3)\cdots(2n+1)]}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0. \quad (5.37)$$

Notemos que, en la expresión anterior, el producto en el denominador no es más que $(2k)!$, mientras que los productos en el numerador pueden escribirse haciendo uso de la notación de doble factorial. Recordando que la notación de doble factorial indica la multiplicación de los números pares (si el número dentro del doble factorial es par) o impares (si el número dentro del doble factorial es impar), podemos ver que

$$\begin{aligned} [(2n+2k-1)(2n+2k-3)\cdots(2n+1)] &= \frac{[(2n+2k-1)(2n+2k-3)\cdots(2n+1)](2n-1)!!}{(2n-1)!!} \\ &= \frac{(2n+2k-1)!!}{(2n-1)!!} \end{aligned} \quad (5.38)$$

y que

$$\begin{aligned} [(2n-2k+2)(2n-2k+4)\cdots(2n-2)(2n)] &= \frac{(2n-2k)!![(2n-2k+2)\cdots(2n-2)(2n)]}{(2n-2k)!!} \\ &= \frac{(2n)!!}{(2n-2k)!!}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Mediante las relaciones entre el doble factorial y el factorial ordinario

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

es claro que

$$\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n+2k)!2^n n!}{2^{n+k}(n+k)!(2n)!}, \quad (5.40)$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n-2k)!!} = \frac{2^n n!}{2^{n-k}(n-k)!}. \quad (5.41)$$

De esta manera, tenemos que el coeficiente a_k de la ecuación (5.37) puede escribirse como

$$a_k = (-1)^k \frac{2^{2n} n! n! (2n+2k)!}{2^{n-k}(n-k)! 2^{n+k}(n+k)!(2n)!(2k)!} a_0 = \frac{n! n! (2n+2k)!}{(n-k)!(n+k)!(2n)!(2k)!} a_0. \quad (5.42)$$

Si ahora regresamos a la notación de C_k , y hacemos los cambios en la expresión anterior de k por $k/2$ y n por $n/2$, tendremos que

$$C_k = \frac{(-1)^{k/2} (n/2)! (n/2)! (n+k)!}{n! \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)! k!} C_0. \quad (5.43)$$

Finalmente, para colocar adecuadamente los índices de sumación, vamos a hacer el siguiente cambio. Ya hemos hecho énfasis en que los coeficientes que se obtienen al resolver la recurrencia para C_k son los que corresponden a k pares si n es par, o bien, son los que corresponden a k impares si n es impar. Si reescribimos k como $n-2m$, entonces, m toma valores de uno en uno (y no de dos en dos como k) desde 0 hasta $[n/2]$, donde la notación $[\cdot]$ indica la parte entera. Haciendo esta sustitución (y renombrando m como k) es claro que

$$C_{n-2k} = \frac{(-1)^{n/2} (n/2)! (n/2)!}{n!} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} C_0, \quad (5.44)$$

con $0 \leq k \leq [n/2]$. Como C_0 es una constante de integración, podemos escogerla en particular como $C_0 = 2^{-n} n! / [(-1)^{n/2} (n/2)! (n/2)!]$, lo que nos lleva a la siguiente expresión para los coeficientes C_k ,

$$C_{n-2k} = \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \quad (5.45)$$

De esta manera, las soluciones a la ecuación diferencial (5.18) con $\mu = n(n+1)$, la cual recibe el nombre de *ecuación de Legendre* y se escribe como

Ecuación de Legendre $\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + n(n+1)P(x) = 0, \quad (5.46)$
--

están dadas por las funciones $P_n(x)$ con los coeficientes C_k de la ecuación (5.45). Estas funciones reciben el nombre de *polinomios de Legendre* y explícitamente se escriben como

Polinomios de Legendre

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (5.47)$$

Observemos que $P_n(x)$ es un polinomio de orden n . Si n es un número par, entonces, $P_n(x)$ contiene solo potencias pares de x y, de manera similar, si n es impar, $P_n(x)$ contiene solo potencias impares de x .

En lo que sigue veremos algunas propiedades de estas funciones, algunas de las cuales derivaremos usando la técnica de la función generatriz.

5.2.2. Función generatriz de los polinomios de Legendre

La función generatriz de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ se obtiene suponiendo que $P_n(x)$ son coeficientes del desarrollo de una cierta función $G(x, t)$ alrededor de $t = 0$,

$$G(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (5.48)$$

Vamos a obtener la forma funcional de G explícitamente realizando la suma correspondiente. Sustituyendo la expresión (5.47) para los polinomios de Legendre en la ecuación anterior obtenemos

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k} t^n. \quad (5.49)$$

Vamos ahora a hacer uso de un lema sobre sumas dobles, una especie de cambio de variable para los índices para transformar una doble suma en otra por conveniencia. En el apéndice A.3 se muestra que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{k, n-2k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{j, m-j}. \quad (5.50)$$

Aplicamos ahora esta identidad en la ecuación (5.49). Para esto tenemos que hacer $k = j$ y $n - 2k = n - j$, lo que nos lleva a las siguientes identidades:

$$2n - 2k = 2(n - 2k) + 2k = 2(m - j) + 2j = 2m, \quad (5.51)$$

$$n - k = (n - 2k) + k = (m - j) + j = m, \quad (5.52)$$

$$n = (n - 2k) + 2k = (m - j) + 2j = m + j. \quad (5.53)$$

Tomando en cuenta lo anterior, podemos ver que

$$G(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (2m)!}{2^{m+j} j! m! (m-j)!} x^{m-j} t^{m+j}, \quad (5.54)$$

lo que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \left(\frac{(2m)!}{2^{m+j} m! m!} \right) \left(\frac{(-1)^j m!}{j! m! (m-j)!} \right) x^{m-j} t^{m+j} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(2m)!}{2^{2m} m! m!} t^m \left(\sum_{j=0}^m \frac{m!}{j! m! (m-j)!} (-t)^j (2x)^{m-j} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.55)$$

En la última igualdad podemos reconocer, inmediatamente, el desarrollo binomial de $(2x - t)^m$, por lo que la función generatriz toma la forma

$$G(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} m! m!} t^m (2x - t)^m. \quad (5.56)$$

Esta última serie corresponde al desarrollo en serie de potencias de la función $(1 - y)^{-1/2}$,

$$(1 - y)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)! y^m}{2^{2m} m! m!} \quad (5.57)$$

de modo que la función generatriz de los polinomios de Legendre puede escribirse como

Función generatriz de los polinomios de Legendre

$$G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \quad (5.58)$$

5.2.3. Algunas propiedades de los polinomios de Legendre

Vamos ahora a hacer uso de la función generatriz de los polinomios de Legendre para obtener algunas propiedades de los polinomios correspondientes.

Relaciones de recurrencia

Como vimos en el caso de las funciones de Bessel, se pueden obtener fórmulas de recurrencia derivando la función generatriz respecto de sus variables. Comencemos por explorar la derivada respecto de x . Por un lado, la derivada respecto a x de $G(x, t)$ dada en la ecuación (5.58) nos da lo siguiente

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{(-1/2)(-2t)}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}}, \quad (5.59)$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)} G(x, t). \quad (5.60)$$

Por otro lado, recordando el desarrollo en serie de $G(x, t)$ alrededor de $t = 0$ tenemos que

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n, \quad (5.61)$$

donde $P'_n(x)$ indica la derivada del polinomio de Legendre $P_n(x)$ respecto a x . Las ecuaciones (5.60) y (5.61) nos dan como resultado la siguiente igualdad,

$$\frac{t}{(1 - 2xt + t^2)} G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n, \quad (5.62)$$

que se puede escribir en la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n. \quad (5.63)$$

Vamos ahora a escribir por separado cada término del miembro derecho de la igualdad anterior,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2x P'_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+2}. \quad (5.64)$$

Vamos a hacer que todas las series involucradas en la ecuación de arriba tengan la potencia de t en común. Para eso notemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n = P'_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} P'_{k+1}(x) t^{k+1}, \quad (5.65)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^{n+2} = \sum_{k=1}^{\infty} P'_{k-1}(x) t^{k+1}, \quad (5.66)$$

en donde hemos realizado los corrimientos de índices $n = k + 1$ en la suma (5.65), y $n = k - 1$ en (5.66). Con estas igualdades, la identidad (5.64) se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} = P'_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} P'_{n+1}(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2xP'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} P'_{n-1}(x)t^{n+1}. \quad (5.67)$$

Si ahora colocamos todos los términos en una sola serie, con algunos remanentes para igualar el inicio de la sumación en $n = 1$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n(x) - P'_{n+1}(x) + 2xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) \right] t^{n+1} + P_0(x)t - P'_0(x) - P'_1(x)t + 2xP'_0(x)t = 0. \quad (5.68)$$

No es difícil darse cuenta de que $P'_0(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ y que $P_1(x) = x$, por lo que los términos fuera de la serie suman cero,

$$P_0(x)t - P'_0(x) - P'_1(x)t + 2xP'_0(x)t = 0.$$

Esto implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[P_n(x) - P'_{n+1}(x) + 2xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) \right] t^{n+1} = 0. \quad (5.69)$$

Por independencia lineal, los coeficientes de la serie anterior deben ser todos idénticos a cero para que se satisfaga la igualdad. En consecuencia, obtenemos la siguiente relación de recurrencia para los polinomios de Legendre:

Primer relación de recurrencia de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) + 2xP'_n(x) = P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x). \quad (5.70)$$

Fórmula de Rodrigues

Vamos ahora a obtener una fórmula que es de mucha importancia en el caso de los polinomios ortogonales. Esta se conoce como la *fórmula de Rodrigues* [5] y esencialmente nos permite obtener el polinomio de Legendre $P_n(x)$ de orden n a través de la n -ésima derivada de alguna función.

Empecemos observando que la n -ésima derivada del monomio x^{2n-2k} puede escribirse como

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{2n-2k} \right) = (2n-2k)(2n-2k-1)(2n-2k-2) \dots (n-2k+1)x^{n-2k} \quad (5.71)$$

Si multiplicamos y dividimos por el factor $(n - 2k)!$ podremos ver que

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(x^{2n-2k} \right) = \frac{(2n - 2k)!}{(n - 2k)!} x^{n-2k}, \quad (5.72)$$

o bien,

$$x^{n-2k} = \frac{(n - 2k)!}{(2n - 2k)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{2n-2k} \right). \quad (5.73)$$

Recordando que el desarrollo en serie de los polinomios de Legendre tiene la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}, \quad (5.74)$$

notamos que es posible remplazar el factor x^{n-2k} por la expresión dada en (5.73) para obtener

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{2^n k! (n - k)!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{2n-2k} \right). \quad (5.75)$$

Acomodando los factores y multiplicando el numerador y denominador por $n!$ podremos darnos cuenta de que la expresión anterior puede escribirse en la siguiente forma:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n - k)!} x^{2n-2k} \right). \quad (5.76)$$

El interior de la derivada puede reconocerse como el desarrollo binomial de $(x^2 - 1)^n$, lo cual nos conduce a la *fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre*.

Fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right). \quad (5.77)$$

La fórmula de Rodrigues es bastante útil cuando queremos calcular los polinomios de Legendre. Cabe recordar que, en cierta forma, ya tenemos una expresión explícita para estas funciones, la cual está dada por (5.47) que ofrece una expresión para $P_n(x)$ como un desarrollo en serie de potencias. A diferencia de dicha expresión la fórmula de Rodrigues ofrece una técnica a partir de derivadas para realizar el cálculo. De inmediato notamos

que el polinomio P_n de orden cero es simplemente $P_0(x) = 1$. Para obtener el polinomio $P_1(x)$ procedemos como sigue:

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left((x^2 - 1) \right) = \frac{1}{2} (2x) = x. \quad (5.78)$$

El siguiente polinomio también se puede calcular de manera directa como se muestra a continuación:

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} \left((x^2 - 1)^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left(4x(x^2 - 1) \right) = \frac{1}{8} (12x^2 - 4). \quad (5.79)$$

En el cuadro [5.1](#), se escriben explícitamente los primeros polinomios de Legendre, y para tener una idea del comportamiento de estas funciones, en la figura [5.1](#) se muestran las gráficas de los primeros seis polinomios de Legendre en función de su argumento x para valores en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, donde los $P_n(x)$ son ortogonales.

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{8} (12x^2 - 4)$
3	$\frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128} (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128} (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256} (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

Cuadro 5.1: Polinomios de Legendre. En el cuadro se muestra las expresiones explícitas de los primeros once polinomios de Legendre.

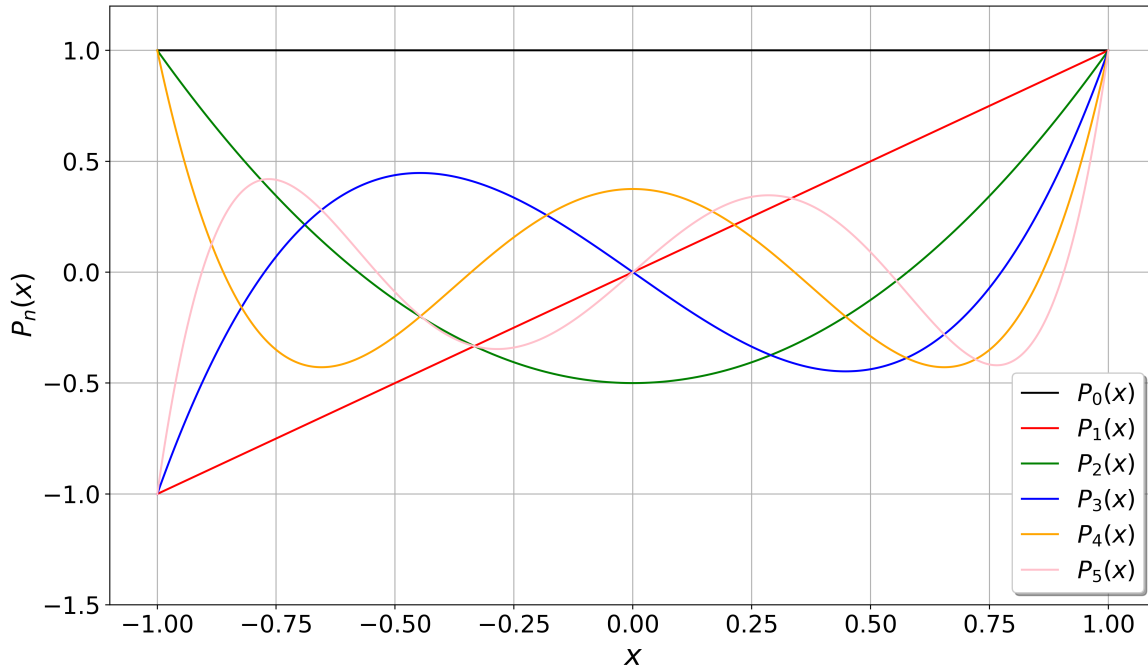


Figura 5.1: Polinomios de Legendre. En la figura se muestran las gráficas de los primeros seis polinomios de Legendre: $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ y $P_5(x)$. Nótese que, para los polinomios de orden par (esto es, para $n = 0, 2, 4$), se tiene que $P_n(0) = 1$. En cambio, para los polinomios de orden impar ($n = 1, 3, 5$) se tiene que $P_n(0) = -1$.

Representaciones alternativas

Vamos ahora a obtener algunas representaciones diferentes para los polinomios de Legendre. Una de las representaciones alternativas que se obtiene directamente de la fórmula de Rodrigues es una representación integral que se consigue de la combinación de dicha fórmula con la fórmula integral de Cauchy. Como sabemos, esta última identidad se expresa como sigue. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un dominio abierto D si γ es una curva simple cerrada orientada en el sentido antihorario cuyo interior está completamente contenido en D y si $t \in \text{int}(\gamma)$ es un punto en el interior de γ , entonces,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-t} dz. \quad (5.80)$$

Más aún, como $f(z)$ se supone analítica y es, por lo tanto, infinitamente diferenciable, la n -ésima derivada puede escribirse como

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(f(t) \right) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}} dz. \quad (5.81)$$

Si sustituimos f por la función $f(x) = (x^2 - 1)^n$, entonces,

$$\frac{d^n}{dt^n} \left((x^2 - 1)^n \right) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (5.82)$$

de modo que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) = \frac{n!}{2^n n! 2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz. \quad (5.83)$$

Con esto observamos que los polinomios de Legendre pueden obtenerse a partir de una integral en el plano complejo como sigue:

Representación integral de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz. \quad (5.84)$$

Esta fórmula es también conocida como la integral de Schlaefli [5], y el contorno de integración, llamado el contorno de Schlaefli, es aquel que encierra el punto x (en este caso x puede considerarse como una variable compleja con parte real en el intervalo $[-1, 1]$).

5.2.4. Ortogonalidad

Recordemos que la ecuación de Legendre se origina como un caso especial de la ecuación que rige el comportamiento de la función que depende de la variable de colatitud θ en el problema de separación de variables considerado en la sección 5.1.1. Debido a esto, tenemos que la variable x corresponde a $\cos(\theta)$, donde θ toma valores en el intervalo $[0, \pi]$, por lo que la variable x toma valores en $[-1, 1]$. No es difícil darse cuenta de que los polinomios de Legendre evaluados en ± 1 corresponden a los valores

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Estos valores nos van a servir para desarrollar la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

Como podemos ver, la ecuación de Legendre tiene ya la forma Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right) = -n(n + 1) P_n(x), \quad (5.85)$$

en la que podemos ver que la función de peso es $w(x) = 1$ y, por lo tanto, los polinomios de Legendre tendrían en principio una relación de ortogonalidad de la forma

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = c_n^2\delta_{n,m}, \quad (5.86)$$

siendo c_n^2 una constante de normalización por determinar.

Como las condiciones de frontera no están en principio bien definidas, analizaremos directamente lo que nos arroja la teoría Sturm-Liouville. Empecemos recordando que la forma general en la que se escribió el problema de tipo Sturm-Liouville fue

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) = -\lambda w(x)u(x), \quad (5.87)$$

donde w es la función de peso y λ representa los valores propios del operador diferencial y $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. De acuerdo con la identidad de Euler, sabemos que si u_1 y u_2 son dos soluciones linealmente independientes con valores propios asociados λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b w(x)u_1^*(x)u_2(x)dx = \left(p(x) [u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)] \right) \Big|_a^b. \quad (5.88)$$

Notemos que para la ecuación de Legendre tenemos que $p(x) = (1 - x^2)$ y que $a = -1$ y $b = 1$. Esto implica que $p(\pm 1) = 1$ y, en consecuencia, tenemos que

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \left[(1 - x^2) (P_n(x)P_m'(x) - P_n'(x)P_m(x)) \right] \Big|_{-1}^1 = 0. \quad (5.89)$$

Es decir, para que el miembro izquierdo de la ecuación anterior sea igual a cero, no hace falta imponer condiciones de frontera especiales, pues la función $p(x) = 1 - x^2$ se encarga de hacer la evaluación idéntica a cero sin importar los valores de $P_n(x)$ en los extremos. Así, tenemos que el conjunto de polinomios de Legendre $\{P_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ forma un conjunto completo y ortogonal de funciones en el intervalo $x \in [-1, 1]$.

Calculemos ahora la constante de normalización c_n^2 . Para ese propósito vamos a hacer uso de la función generatriz de los polinomios de Legendre. Si tomamos la integral de -1 a 1 del cuadrado de la función generatriz de los polinomios de Legendre obtendremos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G(x, t)^2 dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1 - 2xt + t^2} dx = -\frac{1}{2t} \ln(1 - 2xt + t^2) \Big|_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2t} \ln(1 - 2t + t^2) + \frac{1}{2t} \ln(1 + 2t + t^2) \\ &= -\frac{1}{2t} \ln((1 - t)^2) + \frac{1}{2t} \ln((1 + t)^2), \end{aligned} \quad (5.90)$$

de modo que

$$\int_{-1}^1 G(x, t)^2 dx = -\frac{1}{t} \ln(1-t) + \frac{1}{t} \ln(1+t). \quad (5.91)$$

Por otro lado, si usamos el desarrollo en serie de $G(x, t)$ y hacemos la misma integral podremos observar que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G(x, t)^2 dx &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n(x) P_m(x) t^{n+m} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \right) t^{n+m}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, ec. (5.86), tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 G(x, t)^2 dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n^2 \delta_{n,m} t^{n+m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^{2n}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

De este modo, para obtener el valor de la constante c_n^2 basta con desarrollar la función obtenida en (5.91) e igualarla término a término con el desarrollo obtenido arriba, esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^{2n} = -\frac{1}{t} \ln(1-t) + \frac{1}{t} \ln(1+t). \quad (5.94)$$

Debido a que el desarrollo en serie del logaritmo puede escribirse como

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k},$$

entonces, podemos ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{k-1}}{k}, \quad (5.95)$$

Notemos que la diferencia entre las series, que aparece en la ecuación anterior, arroja como resultado solo potencias pares de t , lo que se puede observar al colocar las series en una sola,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (-1)^k) \frac{t^{k-1}}{k}, \quad (5.96)$$

pues la diferencia $1 - (-1)^k$ es cero si k es par y vale 2 cuando k es impar. Si hacemos $k = 2n + 1$, entonces, n corre de cero a infinito, lo cual nos da como resultado

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n}. \quad (5.97)$$

Por independencia lineal notamos que la norma cuadrada c_n^2 puede escribirse como

$$c_n^2 = \frac{2}{2n+1}. \quad (5.98)$$

De acuerdo con la teoría de Sturm-Liouville, sabemos que cualquier función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse como un desarrollo en serie de polinomios de Legendre como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x), \quad (5.99)$$

donde los coeficientes del desarrollo se pueden obtener gracias a la relación de ortogonalidad (5.86). Como conocemos ahora el valor de la constante de normalización, podemos ver que dicha relación puede escribirse explícitamente como

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}. \quad (5.100)$$

De este modo, no es difícil darse cuenta entonces de que los coeficientes del desarrollo en serie de Legendre (5.99) de $f(x)$ se pueden expresar como

$$A_n = \frac{1}{c_n^2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (5.101)$$

5.3. Funciones asociadas de Legendre

5.3.1. Funciones asociadas de Legendre y su ecuación diferencial

A continuación resolveremos el problema original que nos habíamos planteado, esto es, la ecuación diferencial para la variable θ que surgió de intentar resolver la ecuación de onda en una geometría esférica dada por la ecuación

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad (5.102)$$

misma que se puede transformar, haciendo el cambio de variable $x = \cos(\theta)$, en

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P(x) = 0. \quad (5.103)$$

Para obtener el conjunto de soluciones a la ecuación (5.102) vamos a hacer algunos cambios en el caso especial que estudiamos en secciones anteriores, esto es, vamos a modificar la soluciones de la ecuación de Legendre

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad (5.104)$$

y mostraremos que las funciones modificadas resultan ser soluciones de (5.103).

Empecemos tomando la m -ésima derivada de la ecuación de Legendre (5.104). Para ello vamos a invocar la fórmula de Leibniz para la derivada m -ésima del producto,

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(A(x)B(x) \right) = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^k}{dx^k} \left(A(x) \right) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} \left(B(x) \right),$$

la que se puede considerar como una generalización de la regla del producto.

Tomaremos ahora la m -ésima derivada del primer término de la ecuación (5.104), i.e., $(1-x^2)P_n''$. Observemos que uno de los factores es un polinomio de orden dos, por lo que las derivadas diferentes de cero son solamente las de orden cero, de orden uno y de orden dos. Si tomamos como $A(x) = (1-x^2)$, podemos apreciar que la sumación de la fórmula de Leibniz solo llega hasta $k = 2$, pues los demás términos se hacen cero debido a que la k -ésima derivada de $(1-x^2)$ es cero para $k > 2$. De esta forma obtenemos

$$\frac{d^m}{dx^m} \left((1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} \right) = (1-x^2) \frac{d^{m+2} P_n}{dx^{m+2}} - 2mx \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}} - m(m-1) \frac{d^m P_n}{dx^m}. \quad (5.105)$$

Procediendo de manera análoga con el segundo término de (5.104), podemos ver que

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(-2x \frac{dP_n}{dx} \right) = -2x \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}} - 2m \frac{d^m P_n}{dx^m}. \quad (5.106)$$

Para hacer más claras la ecuaciones cambiaremos la notación. Momentáneamente, vamos a denotar por $u(x)$ a la m -ésima derivada de $P_n(x)$. Con este cambio notamos que

$$\frac{d^m}{dx^m} \left((1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} \right) = (1-x^2)u''(x) - 2mx u'(x) - m(m-1)u(x), \quad (5.107)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(-2x \frac{dP_n}{dx} \right) = -2x u'(x) - 2mu(x), \quad (5.108)$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(n(n+1)P_n(x) \right) = n(n+1)u(x). \quad (5.109)$$

Ahora, haciendo uso de las identidades anteriores, observamos que la ecuación (5.104) se transforma en

$$(1 - x^2)u'' - 2mx u' - m(m - 1)u - 2x u' - 2mu + n(n + 1)u = 0, \quad (5.110)$$

y agrupando derivadas semejantes obtenemos

$$(1 - x^2)u''(x) - 2x(m + 1)u'(x) + [n(n + 1) - m(m + 1)]u(x) = 0. \quad (5.111)$$

Vamos a hacer una segunda modificación en las funciones. Vamos a definir la función $v(x)$ como

$$v(x) = (1 - x^2)^{m/2}u(x), \quad (5.112)$$

o bien,

$$u(x) = (1 - x^2)^{-m/2}v(x), \quad (5.113)$$

y vamos a escribir una ecuación diferencial para $v(x)$. Para llevar a cabo esto, tomaremos las derivadas de $u(x)$ en términos de las derivadas de $v(x)$. Con ello, obtenemos que la primera derivada luce como

$$\begin{aligned} u' &= (1 - x^2)^{-m/2}v'(x) + (-m/2)(-2x)(1 - x^2)^{-m/2-1}v(x) \\ &= (1 - x^2)^{-m/2} \left[v'(x) + \frac{mx v(x)}{1 - x^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Por otra parte, la segunda derivada puede escribirse como

$$\begin{aligned} u'' &= (1 - x^2)^{-m/2} \left[v''(x) + \frac{m v(x)}{1 - x^2} + \frac{mx v'(x)}{1 - x^2} + \frac{2mx^2 v(x)}{(1 - x^2)^2} \right] \\ &+ mx(1 - x^2)^{-m/2-1} \left[v'(x) + \frac{mx v(x)}{1 - x^2} \right] \\ &= (1 - x^2)^{-m/2} \left[v''(x) + \frac{m v(x)}{1 - x^2} + \frac{mx v'(x)}{1 - x^2} + \frac{2mx^2 v(x)}{(1 - x^2)^2} + \frac{mx v'(x)}{1 - x^2} + \frac{m^2 x^2 v(x)}{(1 - x^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Agrupando términos semejantes dentro del paréntesis podemos ver que

$$u'' = (1 - x^2)^{-m/2} \left[v''(x) + \frac{2mx}{1 - x^2} v'(x) + \frac{m}{1 - x^2} v(x) + \frac{m(m + 2)x^2}{(1 - x^2)^2} v(x) \right]. \quad (5.116)$$

Sustituyendo las igualdades (5.114) y (5.116) en la ecuación (5.111), nos queda que

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)^{-m/2} \left[(1 - x^2)v'' + 2mx v' + mv + \frac{m(m + 2)x^2 v}{(1 - x^2)} \right. \\ &\left. - 2x(m + 1)v' - \frac{2m(m + 1)x^2 v}{1 - x^2} + [n(n + 1) - m(m + 1)]v \right] = 0, \end{aligned}$$

lo cual, reagrupando términos y deshaciéndose del factor $(1 - x^2)^{-m/2}$, se puede reescribir como

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' + mv + \frac{[m(m+2) - 2m(m+1)]x^2v}{1 - x^2} + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0, \quad (5.117)$$

o bien,

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' + mv - \frac{m^2x^2v}{1 - x^2} + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0. \quad (5.118)$$

Si en el cuarto término en la expresión anterior se escribe $1 - x^2 + 1$ en lugar de $-x^2$ tendremos que

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' + mv + \frac{m^2(1 - x^2)v}{1 - x^2} - \frac{m^2v}{1 - x^2} + [n(n+1) - m(m+1)]v = 0,$$

lo que resulta en

$$(1 - x^2)v'' - 2xv' - \frac{m^2v}{1 - x^2} + n(n+1)v = 0,$$

y coincide con la ecuación (5.103) con $\mu = n(n+1)$. Esto quiere decir que la ecuación diferencial:

Ecuación asociada de Legendre $\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P(x) = 0, \quad (5.119)$
--

tiene como soluciones las funciones $v(x) = (1 - x^2)^{m/2}u(x)$, de modo que, en términos de los polinomios de Legendre, dichas soluciones pueden escribirse como:

Funciones asociadas de Legendre $P_n^m(x) := (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (5.120)$

donde se ha agregado el factor $(-1)^m$ por conveniencia.

Vamos ahora a explorar algunas propiedades de las funciones asociadas de Legendre. Debido a que estas funciones se construyen a partir de los polinomios de Legendre, muchas de las propiedades de las funciones asociadas de Legendre se desprenden de las que ya conocemos para los polinomios. Por ejemplo, no es difícil darse cuenta de que podemos usar la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre para escribir una fórmula análoga para las funciones asociadas de Legendre. Si tenemos presente que la fórmula de Rodrigues para P_n es

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right),$$

es claro que las funciones asociadas de Legendre pueden generarse mediante la fórmula

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(1 - x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} \left((x^2 - 1)^n \right). \quad (5.121)$$

Esta expresión sirve, adicionalmente, para observar los valores permitidos de los índices n y m . Como el orden de la derivada debe ser un entero no negativo, podemos darnos cuenta de que la expresión (5.121) tiene sentido para $m \geq -n$. Además, puesto que el orden del polinomio al interior de la derivada es $2n$, para que la derivada no se anule, el orden de esta debe ser menor que $2n$, esto es, $n + m < 2n$. Resulta claro que m debe ser menor que n para satisfacer esta condición. De este modo, tenemos que los valores para los cuales las funciones asociadas de Legendre están bien definidas son $-n \leq m \leq n$ con $n \in \mathbb{N}_0$.

Una propiedad que se desprende de la fórmula de Rodrigues es una relación entre $P_n^m(x)$ y $P_n^{-m}(x)$. A partir de la fórmula de Leibniz para la m -ésima derivada, es posible mostrar que

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n - m)!}{(n + m)!} P_n^{-m}(x). \quad (5.122)$$

En el cuadro 5.2, se escriben explícitamente las funciones asociadas de Legendre para los primeros valores de n y m . Esto, nos da una idea de la forma funcional de estas funciones en función de su argumento x . Conviene destacar que, al igual que los polinomios de Legendre, las funciones asociadas de Legendre son también ortogonales cuando los valores de x se encuentran en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, el mismo en el cual los $P_n(x)$ son ortogonales.

5.3.2. Función generatriz y relaciones de recurrencia de las funciones asociadas de Legendre

Otra de las propiedades para P_n^m que se puede obtener directamente de los polinomios de Legendre es la función generatriz. Debido a que la función generatriz de los polinomios

n, m	0	1	2	3
0	$P_0^0 = 1$	0	0	0
1	$P_1^0 = x$	$P_1^1 = -(1-x^2)^{1/2}$	0	0
2	$P_2^0 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_2^1 = -3x(1-x^2)^{1/2}$	$P_2^2 = 3(1-x^2)$	0
3	$P_3^0 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$P_3^1 = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1-x^2)^{1/2}$	$P_3^2 = 15x(1-x^2)$	$P_3^3 = -15(1-x^2)^{3/2}$

Cuadro 5.2: Funciones de Legendre. En el cuadro se muestran las expresiones explícitas de las primeras funciones de Legendre para valores de m no negativos. Recuérdese que P_n^{-m} se relaciona con P_n^m a través de la identidad (5.122), por lo que se pueden obtener directamente los casos con m negativa.

de Legendre se escribe como

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

podemos ver que, al derivar m veces la expresión anterior respecto a x y multiplicando por el factor $(-1)^m(1-x^2)^{m/2}$, obtenemos

$$(-1)^m(1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \left((1-2xt+t^2)^{-1/2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^m(1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \right) t^n, \quad (5.123)$$

lo que nos muestra que

$$g(x, t) := \frac{(-1)^m(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+m}^m(x)t^n, \quad (5.124)$$

donde hemos extraído la m -ésima derivada de $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ explícitamente y reacomodando algunos factores.

Mediante la función generatriz de las funciones asociadas de Legendre, podemos extraer algunas relaciones de recurrencia como lo hicimos en el caso de los polinomios. Por ejemplo, si derivamos $g(x, t)$ respecto a t obtenemos, por un lado, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{(-1)^m(2m)!(1-x^2)^{m/2}(-2x+2t)(-m-1/2)}{2^m m! (1-2xt+t^2)^{m+1/2+1}} \\ &= \left(\frac{(-1)^m(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2xt+t^2)^{m+1/2}} \right) \left(\frac{(x-t)(2m-1)}{1-2xt+t^2} \right), \end{aligned} \quad (5.125)$$

de manera que podemos escribir

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{(x-t)(2m-1)}{1-2xt+t^2} g(x, t). \quad (5.126)$$

Por otro lado, tenemos que al derivar el desarrollo respecto a t nos queda

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{n+m}^m(x) t^{n-1}. \quad (5.127)$$

De estas dos últimas identidades podemos ver que

$$(x-t)(2m-1) \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+m}^m t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+m}^m t^{n-1}. \quad (5.128)$$

Lo que sigue ahora es desarrollar los productos y reacomodar los términos en las series resultantes para que tengan una potencia común en t . Primero, podemos ver que las series, término a término, se escriben

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x(2m-1) P_{n+m}^m t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2m-1) P_{n+m}^m t^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+m}^m t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nx P_{n+m}^m t^n \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n P_{n+m}^m t^{n+1}, \end{aligned}$$

y si ahora corremos los índices, en las series que se requiere, para que la potencia de t sea común en todas las sumas, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x(2m-1) P_{n+m}^m t^n - \sum_{k=1}^{\infty} (2m-1) P_{k+m-1}^m t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+m+1}^m t^k - \sum_{n=1}^{\infty} 2nx P_{n+m}^m t^n \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) P_{k+m-1}^m t^k. \end{aligned}$$

Si hacemos que todas las series comiencen en $n=1$, y extraemos los términos necesarios de cada serie para que esto pase, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x(2m-1) P_{n+m}^m t^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2m-1) P_{n+m-1}^m t^n &+ x(2m-1) P_m^m = P_{m+1}^m + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) P_{n+m+1}^m t^n \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} 2nx P_{n+m}^m t^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_{n+m-1}^m t^n \end{aligned}$$

de donde se obtienen las siguientes identidades,

$$x(2m-1) P_m^m = P_{m+1}^m, \quad (5.129)$$

$$x(2m-1) P_{n+m}^m - (2m-1) P_{n+m-1}^m = (n+1) P_{n+m+1}^m - 2nx P_{n+m}^m + (n-1) P_{n+m-1}^m. \quad (5.130)$$

Reuniendo términos semejantes y cambiando $n + m$ por n , podemos ver que esta última igualdad puede escribirse como,

$$x(2n - 1)P_n^m(x) = (n - m + 1)P_{n+1}^m(x) + (n + m)P_{n-1}^m(x). \quad (5.131)$$

Notemos que la identidad adicional obtenida por los remanentes de las series, la ecuación (5.129) está incluida en esta última identidad (haciendo $n = m$ y notando que), por lo que no provee de una recurrencia diferente a la obtenida.

5.3.3. Ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre

Las funciones asociadas de Legendre son soluciones de una ecuación diferencial tipo Sturm-Liouville, por lo que podemos obtener su regla de ortogonalidad analizando la ecuación diferencial correspondiente. Si escribimos la ecuación asociada de Legendre, ec. (5.119), en la forma

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right) - \frac{m^2}{1 - x^2} P_n^m(x) = -n(n + 1)P_n^m, \quad (5.132)$$

podemos ver que las funciones asociadas de Legendre son soluciones de un problema tipo Sturm-Liouville en las que podemos hacer las siguientes identificaciones. Las función $p(x)$ es $p(x) = 1 - x^2$, la función $q(x)$ es $m^2/(1 - x^2)$ y la función de peso $w(x)$ es $w(x) = 1$. Además, esta ecuación nos muestra que los valores propios asociados a $P_n^m(x)$ son $n(n + 1)$ con $n \in \mathbb{N}_0$. Recordando que $x \in [-1, 1]$, y observando que $p(x)(1 - x^2)$ se anula en ± 1 , tenemos que la regla de ortogonalidad que obedecen las funciones P_n^m es la siguiente:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = c_{n,m}^2 \delta_{n,n'}. \quad (5.133)$$

Mediante la aplicación de la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre, no es difícil calcular la constante de normalización cuadrada $c_{n,m}^2$, la cual resulta ser

$$c_{n,m}^2 = \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + m)!}{(n - m)!}.$$

De este modo, podemos escribir la regla de ortogonalidad explícitamente como

Regla de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + m)!}{(n - m)!} \delta_{n,n'}. \quad (5.134)$$

Hay que notar que, dado que las funciones asociadas de Legendre tienen dos índices, es posible desarrollar otro tipo de ortogonalidad. De hecho, si escribimos la ecuación asociada de Legendre en la forma

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right) + n(n+1)P_n^m = \frac{m^2}{1-x^2} P_n^m(x), \quad (5.135)$$

podremos darnos cuenta de que las funciones asociadas de Legendre son soluciones de un problema tipo Sturm-Liouville. Observando la ecuación (5.135), notamos que los valores propios son m^2 , donde m toma valores enteros en $-n \leq m \leq n$, y la correspondiente función de peso es $w(x) = (1-x^2)^{-1}$. De este modo, tenemos que otra regla de ortogonalidad de las funciones asociadas de Legendre, respecto del índice m , puede escribirse como

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^{m'}(x) (1-x^2)^{-1} dx = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{m,m'}. \quad (5.136)$$

Es necesario señalar que esta regla de ortogonalidad no se suele utilizar en problemas de física matemática, pues la ortogonalidad, respecto al índice m en el problema de separación de variables en coordenadas esféricas, viene dada a través de las funciones asociadas a la variable azimutal ϕ , tal como veremos a continuación en la construcción de los armónicos esféricos.

5.4. Armónicos esféricos

Vamos ahora a definir una familia de funciones que resulta ser un conjunto de funciones propias del operador diferencial, que corresponde a la parte angular del operador de Laplace. Puesto que el operador laplaciano ocurre en varias ecuaciones de la física matemática, definir estas funciones hace mucho más sencilla la construcción de soluciones particulares en problemas en los que interviene el laplaciano en coordenadas esféricas. Estas funciones se denominan *armónicos esféricos* y son de mucha importancia en la solución de problemas físicos como la propagación de ondas electromagnéticas y el desarrollo multipolar en electrodinámica o en el problema de átomo de hidrógeno en mecánica cuántica.

5.4.1. Operador de Laplace y los armónicos esféricos

Como hemos visto hasta ahora, la aplicación de la técnica de separación de variables en el problema de la ecuación de onda en coordenadas esféricas nos arroja tres ecuaciones separadas, una para la parte radial, una para la parte angular de colatitud y una más

para la parte angular azimutal. Estas tres ecuaciones que se escriben a continuación

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (-\lambda r^2 - n(n+1)) R = 0, \quad (5.137)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (5.138)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad (5.139)$$

pueden combinarse para escribirse en términos de solo dos ecuaciones, una que contiene la información de la parte radial, y otra que contiene la información de las partes angulares. Esta última puede escribirse como

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + n(n+1) Y(\theta, \phi) = 0, \quad (5.140)$$

donde $Y(\theta, \phi)$ corresponde a la función $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ del *ansatz* de separación. Ya sabemos que para la parte angular azimutal $\Phi(\phi)$, el conjunto de soluciones es el conjunto de funciones exponenciales de la forma

$$\{e^{im\phi} : m \in \mathbb{Z}\},$$

y que las soluciones a la parte angular de colatitud está dada por el conjunto de funciones asociadas de Legendre

$$\{P_n^m(\cos(\theta)) : n \in \mathbb{N}_0, -n \leq m \leq n\}.$$

Resulta claro, entonces, que las soluciones de la ecuación (5.140) deben ser de la forma $e^{im\phi} P_n^m(\cos(\theta))$. Vamos a escribir la función Y como esta combinación de funciones con un factor que haga cumplir una regla de ortogonalidad de manera que la norma cuadrada sea la unidad. Para lograr esto, lo único que tenemos que hacer es multiplicar cada función por el inverso de la norma. Es fácil darse cuenta de que la norma cuadrada en este caso es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(e^{-im\phi} P_n^m(\cos(\theta)) \right)^2 d(\cos(\theta)) d\phi = 2\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (5.141)$$

Lo anterior nos motiva a definir los armónicos esféricos $Y_{n,m}$ como sigue:

Armónicos esféricos $Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}. \quad (5.142)$

Con todas las expresiones explícitas de las funciones asociadas de Legendre que ya tenemos hasta este momento, podemos, sin mucho problema, obtener los primeros armónicos esféricos. Por ejemplo, es claro que $Y_0^0(\theta, \phi)$ debe ser constante, lo cual es consecuencia de que $m = 0$ hace que $e^{im\phi}$ sea igual a uno, al igual que lo es $P_0^0(x)$, es decir, $P_0^0(x) = 1$. Con esto, resulta claro que

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}. \quad (5.143)$$

Podemos proseguir con el caso $n = 1$ también de manera directa. Por ejemplo, para obtener Y_1^0 tenemos que:

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1^0(\cos(\theta)), \quad (5.144)$$

pero ya sabemos que $P_1^0 = x$, de modo que:

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta). \quad (5.145)$$

Y podemos proceder de igual manera para obtener Y_1^1 y Y_1^{-1} . De hecho, de acuerdo con el cuadro 5.2, ya sabemos que $P_1^1(x) = -(1 - x^2)^{1/2}$ y, además, como $P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}P_1^1(x)$, también sabemos que $P_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{1/2}$, de modo que obtenemos para Y_1^1 lo siguiente:

$$Y_1^1(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{2!} P_1^1(\cos(\theta)) e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi}, \quad (5.146)$$

mientras que para Y_1^{-1} se obtiene:

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} P_1^{-1}(\cos(\theta)) e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{-i\phi}. \quad (5.147)$$

En el cuadro 5.3, se muestran explícitamente los armónicos esféricos para los valores de $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ y para $0 \leq m \leq n$.

n, m	0	1	2
0	$Y_0^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$	—	—
1	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi}$	—
2	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$	$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{2i\phi}$
3	$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta))$	$Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin(\theta) (5 \cos^2(\theta) - 1) e^{i\phi}$	$Y_3^2 = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2(\theta) \cos(\theta) e^{2i\phi}$

Cuadro 5.3: Armónicos esféricos.

Debido al factor de normalización que se ha incluido en la definición de los armónicos esféricos, tenemos que dichas funciones satisfacen una regla de ortogonalidad sencilla dada por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (Y_n^m(\theta, \phi))^* Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (5.148)$$

donde $(Y_n^m(\theta, \phi))^*$ significa el complejo conjugado de $Y_n^m(\theta, \phi)$. Esta relación de ortonormalidad se puede también inferir por el hecho de que los armónicos esféricos $Y_n^m(\theta, \phi)$ son soluciones de una ecuación tipo Sturm-Liouville, lo que se puede ver reescribiendo la ecuación (5.140) en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{dY}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} = -n(n+1) \sin(\theta) Y(\theta, \phi). \quad (5.149)$$

Es claro, de la igualdad de arriba, que la función de peso en este caso es $\sin(\theta)$, de modo que las soluciones de esta última ecuación deben formar un conjunto completo de funciones, en el que cada una de ellas, los armónicos esféricos, se pueden ver como vectores propios del operador diferencial

$$\mathbf{L}^2 := \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (5.150)$$

con valores propios asociados Y_n^m dados por $\lambda_{n,m} = n(n+1)$.

De hecho, el operador de Laplace ∇^2 en coordenadas esféricas puede escribirse como la suma de dos operadores diferenciales, uno que depende de la parte angular y otro de la parte radial como

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (5.151)$$

es decir,

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2. \quad (5.152)$$

En numerosos problemas físicos esta descomposición se vuelve muy importante por su significado físico. Por ejemplo, en el caso de la mecánica cuántica, el operador $\mathbf{L}^2$ es, salvo una constante, definido como el operador de momento angular, lo que vuelve la definición de los armónicos esféricos de importancia práctica en problemas físicos.

Existen numerosas propiedades de los armónicos esféricos que se pueden obtener de las funciones elementales que los componen, esto es, de las funciones asociadas de Legendre y las exponenciales imaginarias.

Por ejemplo, una de las propiedades que se puede obtener inmediatamente es una relación entre Y_n^m y Y_n^{-m} . De hecho, no es difícil ver directamente de su definición que

$$Y_n^m(\theta, \phi)^* = (-1)^m Y_n^{-m}(\theta, \phi), \quad (5.153)$$

donde se ha hecho uso de la relación (5.122) entre $P_n^m(x)$ y $P_n^{-m}(x)$.

Ya hemos enfatizado el hecho de que los armónicos esféricos son soluciones de una ecuación diferencial con la estructura de Sturm-Liouville. Esto indica que el conjunto de funciones

$$\{Y_n^m(\theta, \phi) : n \in \mathbb{N}_0, -n \leq m \leq n\}$$

forma un conjunto completo de funciones, de modo que cualquier función $f(\theta, \phi) : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ puede desarrollarse como una serie de armónicos esféricos, desarrollo conocido como *serie de Laplace*,

Desarrollo en serie de armónicos esféricos (serie de Laplace)

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n,m} Y_n^m(\theta, \phi). \quad (5.154)$$

En esta, los coeficientes del desarrollo pueden obtenerse gracias a la propiedad de ortogonalidad,

$$A_{n,m} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_n^m(\theta, \phi)^* f(\theta, \phi) \sin(\theta) d\phi d\theta. \quad (5.155)$$

5.5. Funciones de Bessel esféricas

Vamos ahora a concentrarnos en el problema de obtener la solución para la parte radial de la ecuación de onda (5.1) cuando implementamos la técnica de separación de variables. Como hemos visto, la función $R(r)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [-\lambda r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (5.156)$$

Ya mencionamos que, en el caso de las coordenadas polares, la ecuación para la parte radial origina las funciones de Bessel. En este caso, la ecuación para la parte radial de la ecuación de onda también tiene como soluciones una familia de las funciones de Bessel, que son conocidas como las *funciones de Bessel esféricas*.

5.5.1. Funciones de Bessel de orden semientero

Si tomamos la constante de separación como una constante negativa, la cual denotaremos, como en otros casos, por $\lambda = -k^2$, con $k \in \mathbb{R}$, tenemos que la ecuación (5.156) se escribe como

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] R = 0. \quad (5.157)$$

Si ahora definimos la función $u(x)$ como sigue

$$R(r) = \frac{u(kr)}{(kr)^{1/2}},$$

veremos que sus primera y segunda derivadas se escriben como

$$\frac{dR}{dr} = (kr)^{-1/2} k u'(kr) - \frac{1}{2} (kr)^{-3/2} k u(kr), \quad (5.158)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = (kr)^{-1/2} k^2 u''(kr) - (kr)^{-3/2} k^2 u'(kr) + \frac{3}{4} (kr)^{-5/2} k^2 u(kr). \quad (5.159)$$

Si sustituimos en la ecuación (5.157), tendremos que la ecuación diferencial que satisface $u(x)$ es

$$\begin{aligned} & (kr)^{-1/2} (kr)^2 u''(kr) - (kr)^{-3/2} (kr)^2 u'(kr) + \frac{3}{4} (kr)^{-5/2} (kr)^2 u(kr) + 2(kr)^{-1/2} kr u'(kr) \\ & - (kr)^{-3/2} kr u(kr) + [(kr)^2 u(kr) - n(n+1)] (kr)^{-1/2} u(kr) = 0. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Factorizando $(kr)^{-1/2}$ y reduciendo términos semejantes en la expresión anterior, podemos ver que

$$(kr)^{-1/2} \left[(kr)^2 u''(kr) + kr u'(kr) - \frac{1}{4} u(kr) + [(kr)^2 - n^2 + n] u(kr) \right] = 0. \quad (5.161)$$

De esta forma, la ecuación diferencial que satisface $u(x)$ (haciendo el cambio $x = kr$) es de la forma

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + \left[x^2 - n^2 - n - \frac{1}{4} \right] u(x) = 0, \quad (5.162)$$

o bien, notando que $n^2 + n + 1/4$ es un cuadrado perfecto, i.e. $n^2 + n + 1/4 = (n + 1/2)^2$, tenemos que

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + \left[x^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] u(x) = 0, \quad (5.163)$$

que es la ecuación diferencial de Bessel de orden $n + 1/2$.

5.5.2. Funciones de Bessel esféricas

Como las soluciones a la ecuación (5.163) son las funciones de Bessel, es claro que cualquier solución puede expresarse como combinación lineal de las funciones de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ o las funciones de Neumann $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$. Dado que $R(x) = u(kr)/(kr)^{1/2}$, entonces, tenemos que las soluciones a la parte radial de la ecuación de onda, la ecuación (5.157), se pueden expresar como

$$R(r) = A \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}} + B \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{(kr)^{1/2}}. \quad (5.164)$$

En este punto se vuelve conveniente definir un nuevo tipo de funciones, llamadas funciones de Bessel esféricas, que corresponden a las soluciones de la ecuación (5.157). De esta forma se definen las funciones de Bessel esféricas, $j_n(x)$ y $n_n(x)$ como sigue

Funciones de Bessel esféricas	
$j_n(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x),$	(5.165)
$n_n(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x),$	(5.166)
$h_n^{(1)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x),$	(5.167)
$h_n^{(2)}(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x).$	(5.168)

Es bastante claro que varias de las propiedades de las funciones de Bessel esféricas pueden obtenerse a partir de las propiedades de las funciones de Bessel ordinarias. Por ejemplo, el desarrollo en serie de potencias para j_n puede obtenerse directamente del correspondiente desarrollo de J_n ,

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+n+\frac{1}{2})!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+1/2}. \quad (5.169)$$

Recordando la fórmula de duplicación de Legendre

$$z! \left(z + \frac{1}{2}\right)! = 2^{-2z-1} \pi^{1/2} (2z+1)!,$$

podemos notar que la serie (5.169) para j_n puede escribirse como sigue,

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)! 2^{2k+2n+1}}{k! \pi^{1/2} (2k+2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n+1/2}, \quad (5.170)$$

o bien, cancelado algunos factores,

$$j_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^n (n+k)!}{k! (2k+2n+1)!} x^{2k+n}. \quad (5.171)$$

Un caso especial que merece atención es $n = 0$. Del desarrollo en serie anterior observamos que

$$j_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad (5.172)$$

donde podemos reconocer el desarrollo en serie de la función $\sin(x)$, por lo cual tenemos que

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (5.173)$$

No es difícil darse cuenta de que la función $n_0(x)$ conduce a una expresión análoga en términos de $\cos(x)$. Para mostrar esto, solamente hay que notar que

$$n_n(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\pi/2x} J_{-n-1/2}(x)$$

(¿por qué?) y recordar que,

$$\frac{d}{dx} \left(x^\nu J_\nu(x) \right) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (5.174)$$

De hecho, si hacemos $\nu = 1/2$ en la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left(x^{1/2} J_{1/2}(x) \right) = x^{1/2} J_{-1/2}(x), \quad (5.175)$$

lo que nos lleva a escribir $n_0(x)$ como

$$n_0(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^{1/2} J_{1/2}(x) \right), \quad (5.176)$$

o bien, notando que el interior de la derivada puede escribirse en términos de $j_0(x)$,

$$n_0(x) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{1/2}(x) \right) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x j_0(x) \right), \quad (5.177)$$

nos lleva directamente a la identidad,

$$n_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x}. \quad (5.178)$$

Esta última identidad para $n_0(x)$, junto con la de $j_0(x)$, nos llevan también a identidades para las funciones de Hankel esféricas, $h_0^{(1)}(x)$ y $h_0^{(2)}(x)$, en términos de funciones trigonométricas como

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{\sin(x)}{x} - i\frac{\cos(x)}{x} = -i\frac{e^{ix}}{x}, \quad (5.179)$$

$$h_0^{(2)}(x) = \frac{\sin(x)}{x} + i\frac{\cos(x)}{x} = i\frac{e^{-ix}}{x}. \quad (5.180)$$

5.5.3. Algunas propiedades de las funciones de Bessel esféricas

Estableceremos ahora algunas propiedades de las funciones de Bessel esféricas que nos van a servir como punto de partida para obtener fórmulas explícitas en términos de funciones trigonométricas, tal como se hizo para j_0 y n_0 . Para empezar, recordemos que las funciones de Bessel satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$F_{\nu-1}(x) + F_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}F_{\nu}(x), \quad (5.181)$$

$$F_{\nu-1}(x) - F_{\nu+1}(x) = 2F'_{\nu}(x), \quad (5.182)$$

en las que F_n representa la función de Bessel J_0 , la función de Neumann N_n o las funciones de Hankel $H_n^{(1)}$ o $H_n^{(2)}$. Si sustituimos ν por $n + 1/2$ y multiplicamos por $(\pi/2x)^{1/2}$ en las ecuaciones de arriba, podemos ver que

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}f_n(x), \quad (5.183)$$

$$f_{n-1}(x) - f_{n+1}(x) = 2(\pi/2x)^{1/2}F'_n(x), \quad (5.184)$$

donde hemos definido la función f_n como

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}F_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Observemos que las funciones f'_n y F'_n se relacionan entre sí como

$$\frac{df_n(x)}{dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}F'_{n+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-3/2}F_{n+\frac{1}{2}}(x), \quad (5.185)$$

lo que nos lleva a la siguiente identidad,

$$f'_n(x) + \frac{1}{2x}f_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}F'_\nu(x), \quad (5.186)$$

podemos ver que la igualdad (5.184) puede escribirse

$$f_{n-1}(x) - f_{n+1}(x) = 2f'_n(x) + \frac{1}{x}f_n(x). \quad (5.187)$$

Finalmente, haciendo uso de la relación de recurrencia (5.183) en la forma

$$\frac{1}{2n+1}[f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x)] = \frac{1}{x}f_n(x), \quad (5.188)$$

obtenemos que la expresión (5.187) puede reescribirse como

$$f_{n-1}(x) - f_{n+1}(x) = 2f'_n(x) + \frac{1}{2n+1}[f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x)], \quad (5.189)$$

o bien, simplificando,

$$nf_{n-1}(x) - (n+1)f_{n+1}(x) = (2n+1)f'_n(x). \quad (5.190)$$

En resumen, tenemos que las relaciones de recurrencia que obedecen las funciones de Bessel esféricas f_n (con f_n representando j_n , n_n , $h_n^{(1)}$ o $h_n^{(2)}$) están dadas por:

Relaciones de recurrencia I de las funciones de Bessel esféricas

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x}f_n(x), \quad (5.191)$$

$$nf_{n-1}(x) - (n+1)f_{n+1}(x) = (2n+1)f'_n(x). \quad (5.192)$$

No es difícil darse cuenta de que podemos deducir las siguiente fórmulas a partir de las relaciones de recurrencia (5.191) y (5.192),

Relaciones de recurrencia II de las funciones de Bessel esféricas

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}f_n(x)\right) = x^{n+1}f_{n-1}(x), \quad (5.193)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}f_n(x)\right) = -x^{-n}f_{n+1}(x). \quad (5.194)$$

Estas últimas relaciones de recurrencia son de importancia práctica, ya que con ayuda de estas podemos obtener, recursivamente, expresiones para funciones de Bessel esféricas de orden superior partiendo solamente de las de orden cero. Por ejemplo, si tomamos $n = 0$ en la identidad (5.194), podemos ver que

$$\frac{d}{dx} \left(f_0(x) \right) = -f_1(x), \quad (5.195)$$

de modo que, al sustituir f por j y recordando que $j_0 = \sin(x)/x$, es claro que

$$j_1(x) = -\frac{d}{dx} \left(j_0(x) \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) \quad (5.196)$$

de modo que

$$j_1(x) = -\frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2}. \quad (5.197)$$

Si, en cambio, hacemos $f = n$ en la ecuación (5.195), obtenemos

$$n_1(x) = -\frac{d}{dx} \left(n_0(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\cos(x)}{x} \right) \quad (5.198)$$

y así,

$$n_1(x) = -\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\cos(x)}{x^2}. \quad (5.199)$$

Procediendo análogamente con las funciones $h_n^{(1)}$ y $h_n^{(2)}$, o combinando las expresiones obtenidas para j_1 y n_1 , se puede ver que

$$h_1^{(1)}(x) = e^{ix} \left(-\frac{1}{x} - \frac{i}{x^2} \right), \quad (5.200)$$

$$h_1^{(2)}(x) = e^{-ix} \left(-\frac{1}{x} + \frac{i}{x^2} \right). \quad (5.201)$$

En general, podemos escribir fórmulas para $j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_1^{(1)}(x)$ y $h_1^{(2)}(x)$ como derivadas sucesivas de funciones trigonométricas o exponenciales imaginarias. Éstas son conocidas como las *fórmulas de Rayleigh*.

Fórmulas de Rayleigh

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin}{x} \right), \quad (5.202)$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos}{x} \right), \quad (5.203)$$

$$h_1^{(1)}(x) = -i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x} \right), \quad (5.204)$$

$$h_1^{(2)}(x) = i(-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{e^{-i}}{x} \right). \quad (5.205)$$

5.5.4. Ortogonalidad de las funciones de Bessel esféricas

No es difícil darse cuenta de que la ortogonalidad de las funciones de Bessel esféricas se sigue de la correspondiente propiedad de las funciones de Bessel cilíndricas. Como sabemos, la regla de ortogonalidad de estas últimas esta dada por

$$\int_0^a J_\nu \left(\frac{\tilde{\alpha}_{\nu,\ell}}{a} r \right) J_\nu \left(\frac{\tilde{\alpha}_{\nu,\ell'}}{a} r \right) r dr = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\tilde{\alpha}_{\nu,\ell})]^2 \delta_{\ell,\ell'}, \quad (5.206)$$

donde $\tilde{\alpha}_{\nu,\ell}$ se define como el ℓ -ésimo cero de la función de Bessel $J_\nu(x)$ y $a \in \mathbb{R}$ es un real positivo.

Si tomamos $\nu = n+1/2$ en la igualdad de arriba y escribimos a $J_{n+1/2}(x)$ como $\sqrt{2x/\pi} j_n(x)$ (en donde $x = \alpha_{n,\ell} r/a$), tendremos que

$$\int_0^a \sqrt{\frac{2\alpha_{n,\ell} r}{a\pi}} j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r \right) \sqrt{\frac{2\alpha_{n,\ell'} r}{a\pi}} j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell'}}{a} r \right) r dr = \frac{a^2}{2} \left[\sqrt{\frac{2\alpha_{n,\ell}}{\pi}} j_{n+1}(\alpha_{n,\ell}) \right]^2 \delta_{\ell,\ell'}. \quad (5.207)$$

En lo anterior, $\alpha_{n,\ell}$ se define como el ℓ -ésimo cero de $j_n(x)$. Reacomodando algunos factores podemos ver, a partir de la igualdad anterior, que la relación de ortogonalidad que satisfacen las funciones de Bessel esféricas es

Ortogonalidad de j_n

$$\int_0^a j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r \right) j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell'}}{a} r \right) r^2 dr = \frac{a^3}{2} [j_{n+1}(\alpha_{n,\ell})]^2 \delta_{\ell,\ell'}. \quad (5.208)$$

Y, al igual que en el caso de las funciones de Bessel cilíndricas, también el conjunto de funciones

$$\left\{ j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r \right) : \ell \in \mathbb{N} \right\}$$

forma una base completa de funciones, de modo que cualquier función suficientemente bien comportada $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ puede escribirse como un desarrollo en serie de funciones de Bessel esféricas,

$$f(r) = \sum_{\ell=1}^{\infty} A_{\ell} j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r \right), \quad (5.209)$$

donde los coeficientes del desarrollo pueden obtenerse gracias a la propiedad de ortogonalidad (5.208),

$$A_{\ell} = \frac{2}{a^3} \frac{1}{[j_{n+1}(\alpha_{n,\ell})]^2} \int_0^a f(r) j_n \left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r \right) r^2 dr. \quad (5.210)$$

5.6. Ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas esféricas

5.6.1. Ecuación de onda en un dominio esférico

Procederemos ahora a resolver el problema planteado al inicio de este capítulo, esto es, vamos a obtener una solución general de la ecuación de onda en un dominio esférico de radio a , pidiendo que la solución se anule en esta frontera. Como se ha mencionado ya, la ecuación de onda en coordenadas esféricas puede descomponerse en cuatro ecuaciones diferenciales separadas, correspondientes a cada variable independiente,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n(n+1)) R = 0, \quad (5.211)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (5.212)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad (5.213)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 k^2 T = 0. \quad (5.214)$$

Ya hemos visto que las soluciones correspondientes a la dependencia angular son los armónicos esféricos Y_n^m , esto es,

$$\Theta(\theta) \Phi(\phi) = Y_n^m(\theta, \phi),$$

mientras que las soluciones a la parte radial corresponden a las funciones de Bessel esféricas, $j_n(kr)$ y $n_n(kr)$. Lo último que falta es obtener la solución para la parte temporal. Es fácil ver que $T(t)$ puede escribirse como

$$T(t) = A \cos(\omega_k t) + B \sin(\omega_k t),$$

donde se ha definido $\omega_k := kc$. Para hallar los valores permitidos de la constante de separación k debemos imponer la condición de frontera. Como hemos indicado que la función $\psi(r, \theta, \phi, t)$ debe anularse en la frontera $r = a$, entonces, tenemos que la solución a la parte radial

$$R(r) = C j_n(kr) + D n_n(kr)$$

debe anularse en $r = a$. Como queremos que las funciones sean regulares en el origen, es indispensable fijar la constante de integración $D = 0$ para evitar la divergencia de $n_n(kr)$ en $r = 0$. Una vez descartada esta solución, necesitamos que $R(r = a) = 0$. Esto nos lleva a la siguiente igualdad

$$j_n(ka) = 0.$$

Los valores de k para los cuales esto sucede son los ceros de la función $j_n(x)$ divididos entre a . Esto es, si denotamos por $\alpha_{n,\ell}$ el ℓ -ésimo cero de $j_n(x)$, entonces, los valores de k para los cuales $j_n(ka) = 0$ pueden escribirse como

$$k_{n,\ell} := \frac{\alpha_{n,\ell}}{a}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \quad (5.215)$$

El hecho de que $m \in \mathbb{N}$ se debe a que j_n contiene una cantidad infinitamente numerable de ceros en la recta real positiva. Entonces, queda claro que la parte radial debe escribirse como

$$R(r) := C j_n\left(\frac{\alpha_{n,\ell}}{a} r\right). \quad (5.216)$$

Con todo esto, es posible ver que la función $\psi(r, \theta, \phi, t)$ puede escribirse como la combinación lineal del producto de estas funciones,

$$\psi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi) [A_{n,m,\ell} \cos(\omega_{n,\ell} t) + B_{n,m,\ell} \sin(\omega_{n,\ell} t)], \quad (5.217)$$

donde $\omega_{n,\ell}$ se ha definido como $\omega_{n,\ell} := k_{n,\ell} c$.

Ahora, para hallar los coeficientes de este desarrollo vamos a hacer uso de las condiciones iniciales y de las propiedades de ortogonalidad de las funciones involucradas. Si suponemos que $\psi(r, \theta, \phi, t)$ toma los valores iniciales

$$\psi(r, \theta, \phi, t = 0) := f(r, \theta, \phi), \quad (5.218)$$

$$\partial_t \psi(r, \theta, \phi, t = 0) := g(r, \theta, \phi), \quad (5.219)$$

entonces, la solución general (5.217) debe satisfacer que

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{n,m,\ell} j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (5.220)$$

$$g(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \omega_{n,\ell} B_{n,m,\ell} j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (5.221)$$

y como las funciones $j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi)$ satisfacen en conjunto la siguiente regla de ortogonalidad

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) \left(j_{n'}(k_{n',\ell'} r) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* \right) \left(j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi) \right) d\phi d\theta dr = \frac{a^3}{2} [j_{n+1}(\alpha_{n,m})]^2 \delta_{\ell,\ell'} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (5.222)$$

los coeficientes $A_{n,m,\ell}$ y $B_{n,m,\ell}$ pueden obtenerse como

$$A_{n,m,\ell} = \frac{2}{a^3 [j_{n+1}(\alpha_{n,m})]^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi)^* f(r, \theta, \phi) d\phi d\theta dr,$$

$$B_{n,m,\ell} = \frac{2}{\omega_{n,\ell} a^3 [j_{n+1}(\alpha_{n,m})]^2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta) j_n(k_{n,\ell} r) Y_n^m(\theta, \phi)^* g(r, \theta, \phi) d\phi d\theta dr.$$

5.7. Ejercicios

1. Muestra que los coeficientes $\{C_k : k \in \mathbb{N}\}$, definidos mediante la relación de recurrencia

$$C_{k+2} = \frac{k(k+1) - \mu}{(k+2)(k+1)} C_k, \quad (5.223)$$

son tales que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \quad (5.224)$$

es divergente para cualquier μ no entero. Haz uso del criterio generalizado del cociente para probar que dicha serie diverge.

2. Usando la función generatriz de los polinomios de Legendre,

$$G(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad (5.225)$$

muestra que

$$i) \quad (2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}, \quad ii) \quad P'_{n+1} + P'_{n-1} = 2xP'_n + P_n. \quad (5.226)$$

3. A partir de la función generatriz de los polinomios de Legendre (5.225), muestra que la función generatriz $g(x, t)$ de las funciones asociadas de Legendre $P_n^m(x)$ puede escribirse como

$$g(x, t) = \frac{(-1)^m (2m)! (1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+m}^m(x) t^n. \quad (5.227)$$

(Sugerencia: deriva m veces la ecuación (5.225) y multiplica por $(-1)^m (1-x^2)^{m/2}$ e identifica las funciones asociadas de Legendre en la serie. Recuerda que $P_n^m(x) = 0$ si $n < m$).

4. Usa la función generatriz de las funciones asociadas de Legendre $g(x, t)$ dada en (5.227) para mostrar la relación de recurrencia

$$x(2n-1)P_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x). \quad (5.228)$$

(Sugerencia: deriva $g(x, t)$ respecto a t . Al final sustituye $n+m$ por n).

5. Si se define el operador diferencial

$$L_+ := e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad (5.229)$$

muestra que

$$L_+ Y_l^m(\theta, \phi) = +\sqrt{(l-m)(l+m+1)} Y_l^{m+1}(\theta, \phi). \quad (5.230)$$

Recuerda que

$$Y_l^m(\theta, \phi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}. \quad (5.231)$$

6. Evalúa las siguientes integrales

$$(i) \quad \int_{-1}^1 (2x^2 + 4x + 2) P_n(x) dx, \quad (ii) \quad \int_{-1}^1 (2x^3 + x - 3) P_n(x) dx. \quad (5.232)$$

(Sugerencia: usa propiedades de ortogonalidad).

7. Escribe $f(x) = 3x^5 + x + 2$ y $g(x) = 3x^2 + 4x^3$ como desarrollo en serie de Legendre.

8. Resuelve la ecuación de difusión 3D:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t), \quad (5.233)$$

en un dominio esférico de radio a . Toma como condición de frontera que la derivada normal a la superficie de $\rho(\mathbf{r}, t)$ es igual a cero, es decir, no hay flujo. Usa como condición inicial una densidad de partículas arbitraria, $\rho(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})$ y luego explora algunos casos sencillos como $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ o bien $f(\mathbf{r}) = c$.

9. Resuelve la ecuación de onda 3D:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (5.234)$$

en un dominio contenido entre dos esferas concéntricas, una de radio a y otra de radio b , con $a > b$. Toma como condiciones en la frontera las siguientes:

$$\psi(\mathbf{r}, t)|_{\|\mathbf{r}\|=a} = 0, \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{r}, t)|_{\|\mathbf{r}\|=b} = 0, \quad (5.235)$$

es decir, como el caso del tambor anular 2D, pero extendido al caso 3D.

Usa como condiciones iniciales las siguientes:

$$\psi(\mathbf{r}, t=0) = f(\mathbf{r}), \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{r}, t=0) = g(\mathbf{r}). \quad (5.236)$$

Una vez que obtengas la solución en serie, explora algunos casos sencillos como $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ con $g(\mathbf{r}) = 0$; o bien, $f(\mathbf{r}) = \text{cte}$ con $g(\mathbf{r}) = 0$ u otras combinaciones. Trata de darle sentido físico a las solución con las condiciones dadas.

10. Resuelve la ecuación de difusión 3D:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t), \quad (5.237)$$

en un dominio contenido entre dos esferas concéntricas, una de radio a y otra de radio b , con $a > b$. Toma como condiciones de frontera:

$$\nabla_n \rho(\mathbf{r}, t) \big|_{\|\mathbf{r}\|=a} = 0, \quad \text{y} \quad \rho(\mathbf{r}, t) \big|_{\|\mathbf{r}\|=b} = 0, \quad (5.238)$$

donde ∇_n es la “derivada normal” a la superficie en cuestión. Estas condiciones significan que no hay flujo por la esfera exterior (la de radio a), pero las partículas pueden escapar por la superficie esférica interior.

Usa como condición inicial una densidad de partículas arbitraria, $\rho(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})$ y luego explora algunos casos sencillos como $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ o bien $f(\mathbf{r}) = \text{cte}$.

Capítulo 6

Otras funciones especiales

En este capítulo, analizaremos otra clase de funciones especiales que pueden aparecer en el estudio de ecuaciones que describen fenómenos físicos. Vamos a empezar con un grupo de funciones especiales que son esencialmente *polinomios ortogonales*. Estos son los polinomios de Hermite, que aparecen cuando se estudia el oscilador armónico cuántico, y los polinomios de Laguerre, que se encuentran cuando se estudia el problema de átomo de hidrógeno. Posteriormente, daremos una introducción a las funciones *hipergeométricas*, una clase de funciones multiparámetricas que solucionan una amplia variedad de ecuaciones diferenciales, cuyos casos especiales abarcan muchas de las funciones especiales que se han desarrollado hasta este punto.

6.1. Polinomios ortogonales

6.1.1. Polinomios de Hermite

Vamos a comenzar estudiando una familia de polinomios ortogonales, denominados polinomios de Hermite, que son de mucha utilidad al resolver problemas en física, así como en la teoría de probabilidad y varias otras disciplinas.

Presentaremos los polinomios de Hermite mediante la función generatriz y, con base en ello, vamos a deducir varias de sus propiedades, incluyendo la ecuación diferencial que satisfacen dichas funciones.

La función generatriz $G(x, t)$ de los polinomios de Hermite $H_n(x)$ es una familia de fun-

ciones que nos permite definir los polinomios de Hermite mediante los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias (en una de sus variables), específicamente, esto se escribe como,

$$G(x, t) := e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.1)$$

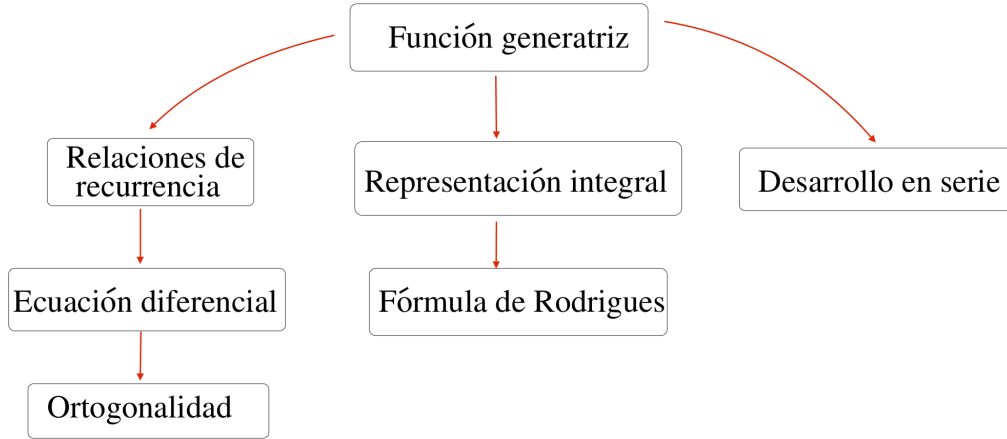


Figura 6.1: Cuadro sinóptico para deducir algunas propiedades de los polinomios de Hermite. Esta es una guía para deducir las propiedades elementales de los polinomios de Hermite, pero este camino no es el único.

Para tener un panorama sobre cómo vamos a proceder para obtener algunas propiedades de los polinomios de Hermite, en la figura [6.1](#) presentamos un cuadro sinóptico que nos servirá como guía para realizar los cálculos correspondientes.

Relaciones de recurrencia y la ecuación de Hermite

Para comenzar, deduciremos las relaciones de recurrencia de las funciones H_n y, a partir de estas, vamos a obtener la ecuación diferencial que satisfacen. Comencemos derivando la función generatriz respecto a x ,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2te^{-t^2+2xt} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!}. \quad (6.2)$$

Esta igualdad se puede reescribir en forma conveniente si hacemos el corrimiento de índices $m = n + 1$, con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2nH_{n-1}(x)) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.3)$$

Por otro lado, si derivamos respecto a x directamente el desarrollo en serie de la función generatriz, obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.4)$$

Comparando las ecuaciones (6.3) y (6.4), podemos ver inmediatamente que las funciones $H_n(x)$ satisfacen la ecuación siguiente,

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (6.5)$$

Si ahora derivamos la función generatriz respecto de la variable t , obtendremos otra relación de recurrencia. Comencemos derivando directamente la función generatriz,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (-2t + 2x)e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2t + 2x)H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.6)$$

Haciendo un poco de álgebra y separando la serie en dos partes, obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.7)$$

Al igual que en el caso anterior, haremos un corrimiento de índices para tener como factor común t^n en cada serie. No es difícil ver, entonces, que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2n)H_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (2x)H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.8)$$

Por otro lado, derivando el desarrollo en serie respecto a t , obtenemos

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (6.9)$$

y siguiendo los razonamientos anteriores, aplicamos en la serie el corrimiento de índices para acomodar la serie para que tenga como factor la potencia t^n . Al igual que en los casos anteriores, no es difícil ver que

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.10)$$

De este modo, comparando las ecuaciones (6.8) y (6.10), obtenemos la segunda relación de recurrencia para las funciones $H_n(x)$,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (6.11)$$

Relaciones de recurrencia de los polinomios de Hermite

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (6.12)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (6.13)$$

Vamos a usar las relaciones (6.12) y (6.13) para obtener la ecuación diferencial que satisface las funciones H_n . Primero, derivemos respecto a x la expresión (6.12), con lo cual obtenemos

$$H''_n(x) = 2nH'_{n-1}(x). \quad (6.14)$$

Ahora, tomemos la derivada respecto a x de la ecuación (6.13), lo que resulta en

$$H'_{n+1}(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - 2nH'_{n-1}(x). \quad (6.15)$$

Si sustituimos $-2nH'_{n-1}$ de la igualdad (6.14) en la ecuación anterior, podemos ver que

$$H'_{n+1}(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - H''_n(x). \quad (6.16)$$

Ahora, para deshacernos de la función $H'_{n+1}(x)$, notemos que la relación de recurrencia (6.12) puede reescribirse como

$$H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x), \quad (6.17)$$

al sustituir $n+1$ por n . Este resultado se puede usar en la igualdad (6.16) para obtener,

$$2(n+1)H_n(x) = 2xH'_n(x) + 2H_n(x) - H''_n(x). \quad (6.18)$$

Finalmente, al reacomodar los términos de la ecuación, obtenemos lo que conocemos como *ecuación de Hermite*.

Ecuación de Hermite

$$H''(x) - 2xH'(x) + 2nH(x) = 0. \quad (6.19)$$

Ortogonalidad

Es claro que la ecuación de Hermite es una ecuación diferencial ordinaria y homogénea, pero que no se encuentra en la forma autoconjugada. Para escribir la ecuación de Hermite en la forma autoconjugada hay que recordar que el factor que convierte la ecuación diferencial a su forma autoconjugada está dado por

$$\mu(x) = \frac{1}{p_2(x)} e^{\int^x p_1(x')/p_2(x') dx'}. \quad (6.20)$$

Observando la ecuación de Hermite (6.19), podemos notar que las funciones $p_2(x) = 1$ y $p_1(x) = -2x$, de modo que

$$\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')} dx' = - \int^x 2x' dx' = -x^2,$$

lo que implica que

$$\mu(x) = e^{-x^2}.$$

Esto muestra que la forma Sturm-Liouville de la ecuación de Hermite se escribe como

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx} \right) = -2n e^{-x^2} H_n(x). \quad (6.21)$$

Ya que contamos con la forma Sturm-Liouville de la ecuación diferencial, podemos obtener las condiciones para que se cumpla la ortogonalidad. De hecho, si nos damos cuenta de que la función $p(x) = e^{-x^2}$ desaparece en $\pm\infty$, podemos establecer sin mayor trámite la regla de ortogonalidad para las funciones $H_n(x)$ como sigue,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (6.22)$$

siendo N_n^2 la norma cuadrada de las funciones de Hermite. Calculemos ahora su valor. Para este propósito vamos a hacer uso de la función generatriz. Si integramos el cuadrado de la función $G(x, t)e^{-x^2}$ respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-t^2+2xt} \right]^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2+4xt-x^2} dx \\ &= e^{-2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2+4xt-x^2} dx \\ &= e^{-2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2t)^2} dx \end{aligned} \quad (6.23)$$

lo cual resulta en

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-2t^2}. \quad (6.24)$$

Por otro lado, si integramos el cuadrado de la función generatriz pero haciendo uso del desarrollo en serie de potencias, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} H_n(x) H_m(x) \frac{t^{n+m}}{n!m!} e^{-x^2} dx. \quad (6.25)$$

Intercambiando el orden de la suma y la integral obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx \right) \frac{t^{n+m}}{n!m!}, \quad (6.26)$$

y haciendo uso de la regla de ortogonalidad obtenida por medio de la teoría de Sturm-Liouville, es claro que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_n^2 \delta_{n,m} \frac{t^{n+m}}{n!m!}, \quad (6.27)$$

lo que resulta en

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G(x, t)]^2 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} N_n^2 \frac{t^{2n}}{n!n!}. \quad (6.28)$$

Las ecuaciones (6.24) y (6.28) nos indican que

$$\sqrt{\pi} e^{-2t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} N_n^2 \frac{t^{2n}}{n!n!}, \quad (6.29)$$

de modo que, para hallar los valores de N_n^2 , tenemos que hacer el desarrollo en serie de la función e^{-2t^2} , lo que nos lleva a escribir la siguiente igualdad,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \frac{2^n t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} N_n^2 \frac{t^{2n}}{n!n!}, \quad (6.30)$$

y para que ambas series coincidan es necesario imponer la igualdad

$$\sqrt{\pi} 2^n = \frac{N_n^2}{n!},$$

o bien,

$$N_n^2 = \sqrt{\pi} 2^n n!. \quad (6.31)$$

Esta igualdad quiere decir, esencialmente, que la norma cuadrada de los polinomios de Hermite viene dada por $\sqrt{\pi} 2^n n!$, o bien, escrito de manera alternativa, tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!. \quad (6.32)$$

Representación integral y fórmula de Rodrigues

Vamos ahora a obtener una representación integral de los polinomios de Hermite y, a partir de esto, obtendremos la fórmula de Rodrigues. Primero, debemos darnos cuenta de que la función generatriz nos ofrece una vía directa para obtener una representación integral, ya que si consideramos la función $G(x, t)$ como una función de variable compleja en la variable t , entonces, la fórmula

$$G(x, t) = e^{-t^2 + 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (6.33)$$

se puede considerar como un desarrollo en serie de Laurent. Los coeficientes de dicho desarrollo, H_n , coinciden con la n -ésima derivada de G respecto a t evaluada en el origen,

$$H_n(x) = \left. \frac{\partial^n G}{\partial t^n} \right|_{t=0}. \quad (6.34)$$

Esta identidad nos permite aplicar la fórmula integral de Cauchy para la n -ésima derivada de una función, obteniendo

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{G(x, t)}{t^{n+1}} dt, \quad (6.35)$$

lo que se puede escribir explícitamente como

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{-t^2 + 2xt} dt. \quad (6.36)$$

Ahora, para obtener una representación integral (como fórmula de Schlaefli), haremos un cambio de variable en la integral (6.36). Primero, vamos a completar el cuadrado perfecto

en el argumento de la exponencial sumando y restando x^2 , lo que nos permite obtener

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{n!e^{x^2}}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{-t^2+2xt-x^2} dt \\ &= \frac{n!e^{x^2}}{2\pi i} \oint \frac{e^{-(x-t)^2}}{t^{n+1}} dt. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Si ahora hacemos el cambio de variable $z = x - t$, entonces, tenemos las siguientes igualdades

$$t = x - z, \quad \Rightarrow \quad t^{n+1} = -(-1)^n(z - x)^{n+1}, \quad dt = -dz.$$

De este modo, podemos ver que

$$H_n(x) = \frac{n!e^{x^2}}{2\pi i} \oint \frac{(-1)^n e^{-z^2}}{(z - x)^{n+1}} dz, \quad (6.38)$$

o bien, reacomodando los factores convenientemente

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z - x)^{n+1}} dz. \quad (6.39)$$

De la expresión anterior, observamos inmediatamente (invocando la fórmula integral de Cauchy) que

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z - x)^{n+1}} dz = \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{-z^2} \right) \Big|_{z=x} = \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right),$$

lo que quiere decir que las funciones $H_n(x)$ pueden escribirse como

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right), \quad (6.40)$$

que es la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite.

Es necesario notar que hasta este momento, desde que introdujimos las funciones $H_n(x)$, no hemos visto realmente que se trate de polinomios. La fórmula de Rodrigues nos muestra que, efectivamente, las funciones $H_n(x)$ son polinomios de x , ya que al derivar sucesivamente la función e^{-x^2} , siempre tenemos como factor común e^{-x^2} . Este factor multiplicado por el prefactor e^{x^2} que aparece en (6.40) se anula, dejando únicamente funciones polinomiales después de dicha operación. Algo que puede resultar intrigante es que todas las propiedades anteriores a la fórmula (6.40) se obtuvieron sin necesidad de saber la naturaleza explícita de las funciones H_n .

Representación integral y fórmula de Rodrigues de los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint t^{-n-1} e^{-t^2+2xt} dt, \quad (6.41)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (6.42)$$

Ya con la fórmula de Rodrigues podemos obtener expresiones explícitas de los primeros polinomios de Hermite. Es claro que cuando $n = 0$ tenemos que $H_0(x) = 1$. Ahora, para $n = 1$ podemos evaluar la ecuación (6.42) directamente:

$$H_1(x) = (-1)e^{x^2} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) = (-1)e^{x^2} (-2xe^{-x^2}) = 2x. \quad (6.43)$$

Para el caso $n = 2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} H_2(x) &= e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} (e^{-x^2}) = e^{x^2} \frac{d}{dx} (-2xe^{-x^2}) \\ &= e^{x^2} (4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2}) = 4x^2 - 2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Y podríamos continuar con el cálculo de los polinomios de Hermite de orden superior aplicando el mismo procedimiento. En el cuadro 6.1, podemos apreciar los primeros diez polinomios de Hermite calculados de manera explícita. Asimismo, en la figura 6.2 podemos ver el comportamiento de los primeros seis polinomios de Hermite. Hay que recordar que, en este caso, el intervalo en el que las funciones $H_n(x)$ es toda la recta real, es decir, $x \in \mathbb{R}$.

Desarrollo en serie

A continuación, obtendremos de manera explícita los polinomios de Hermite como un desarrollo en serie de potencias. Para ese propósito vamos a usar el hecho de que los polinomios de Hermite se generan mediante la función $G(x, t) = e^{-t^2+2xt}$, esto es,

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.45)$$

n	$H_n(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 2$
3	$8x^3 - 12x$
4	$16x^4 - 48x^2 + 12$
5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$
6	$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
7	$128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680$
8	$256x^8 - 3548x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$
9	$512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$
10	$1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 + 30240$

Cuadro 6.1: Polinomios de Hermite. En el cuadro se muestran las expresiones explícitas de los primeros once polinomios de Hermite.

Para obtener un desarrollo en serie de potencias vamos a desarrollar la función exponencial con la fórmula del desarrollo en serie de Taylor que conocemos,

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-t^2 + 2xt)^n. \quad (6.46)$$

Ahora, debemos notar que el sumando es un binomio a la n -ésima potencia. Usando, entonces, el bien conocido desarrollo binomial, obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{-t^2+2xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-t^2)^k (2xt)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^{n+k}.
\end{aligned} \quad (6.47)$$

Ahora, usaremos una identidad que hemos explotado varias veces para obtener desarrollos

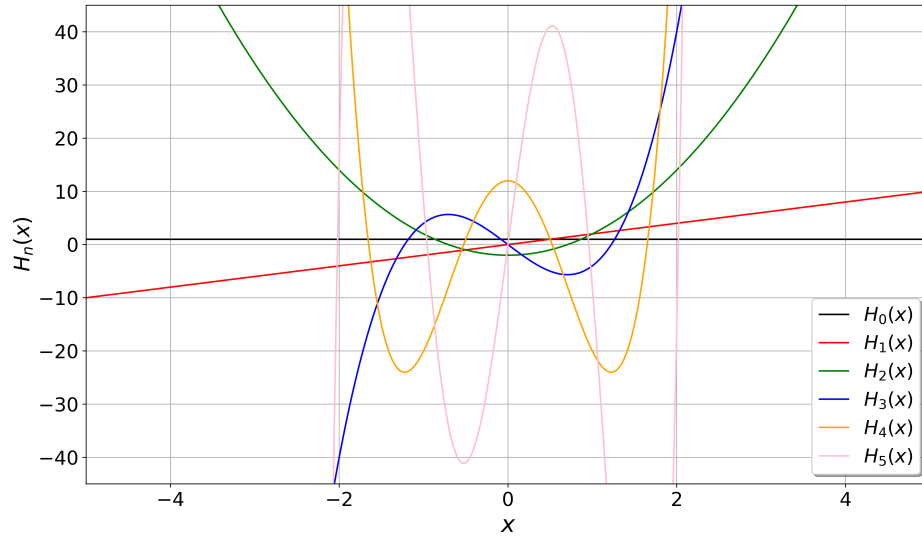


Figura 6.2: Polinomios de Hermite. En la figura se muestran las gráficas de los primeros seis polinomios de Hermite: $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$ y $H_5(x)$. El dominio en el que se muestran estas funciones es $[-5, 5]$, pero se extiende, en realidad, en toda la recta real.

en serie de algunas funciones especiales:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{k,n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[m/2]} a_{s,m-2s}. \quad (6.48)$$

Para aplicar esta identidad a la ecuación (6.47), tenemos que poner el sumando de dicha expresión como una función de k y $n - k$, de hecho, podemos ver que

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^{(n-k)+2k}, \quad (6.49)$$

lo que nos permite hacer la sustitución directa de s por k , y $n - k$ por $m - 2s$, para obtener,

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^s}{s!(m-2s)!} (2x)^{m-2s} t^m. \quad (6.50)$$

Si cambiamos las variables de sumación m y s por n y k , respectivamente, podemos ver que

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \frac{t^n}{n!}, \quad (6.51)$$

expresión que podemos comparar directamente con el desarrollo en serie,

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.52)$$

Comparando los coeficientes de $t^n/n!$ de las series (6.51) y (6.52), podemos expresar los polinomios de Hermite como el siguiente desarrollo en serie de potencias de x como

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \quad (6.53)$$

6.1.2. Polinomios de Laguerre

Ecuación de Laguerre y la representación integral de su solución

Vamos ahora a presentar los polinomios de Laguerre, pero usando un camino completamente diferente al caso de los polinomios de Hermite. Primero, vamos a establecer la ecuación diferencial y la solución correspondiente mediante una representación integral. Posteriormente, estableceremos diversas propiedades a partir de dicha representación integral. Por ejemplo, vamos primero a obtener una fórmula de Rodrigues a partir de la representación integral para luego obtener un desarrollo en serie de potencias haciendo uso de la fórmula de Leibniz para derivar la potencia de un binomio. Luego, de la misma representación integral, vamos a desarrollar la función generatriz para luego obtener algunas relaciones de recurrencia en la forma habitual. Sin duda alguna, también abordaremos la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre invocando la teoría de Sturm-Liouville. El cuadro sinóptico de la figura 6.3 muestra esquemáticamente una guía de las deducciones que haremos a partir de la representación integral.

Vamos a comenzar presentando la ecuación de Laguerre, la cual es una ecuación diferencial de segundo orden lineal y homogénea que se escribe como

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad (6.54)$$

con $n \in \mathbb{N}_0$.

Vamos ahora a mostrar que la ecuación de Laguerre tiene como solución las funciones $L_n(x)$ cuya representación como integral en el plano complejo se escribe como

$$L_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz, \quad (6.55)$$

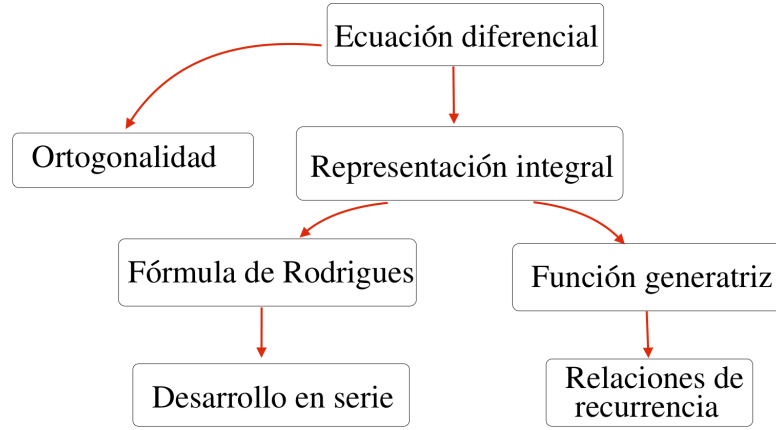


Figura 6.3: Cuadro sinóptico para deducir algunas propiedades de los polinomios de Laguerre. Esta es una guía para deducir las propiedades elementales de los polinomios de Laguerre, pero este camino no es único.

donde la integral de contorno se realiza a lo largo de una trayectoria cerrada en cuyo interior se encuentra el origen del plano- z complejo.

Para mostrar que la función $L_n(x)$ es, efectivamente, solución de la ecuación de Laguerre vamos a obtener las correspondientes derivadas de L_n para luego sustituir en la ecuación (6.54). Comencemos escribiendo las derivadas de $L_n(x)$,

$$L'_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(-\frac{z}{1-z} \right) \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz, \quad (6.56)$$

$$L''_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^2}{(1-z)^2} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz. \quad (6.57)$$

Si sustituimos estas expresiones para L_n y sus derivadas en la ecuación de Laguerre, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{xz^2}{(1-z)^2} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-x)z}{1-z} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint n \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz = 0.$$

Notemos que las integrales de la ecuación anterior se realizan todas a lo largo de la misma trayectoria en el plano complejo, por lo que podemos colocar todos los términos dentro de una sola integral,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{xz^2}{(1-z)^2} - \frac{(1-x)z}{1-z} + n \right] \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz = 0, \quad (6.58)$$

en donde hemos factorizado algunas cantidades en común de cada integrando. Para mostrar que $L_n(x)$ es solución de la ecuación de Laguerre, tenemos solamente que probar

que la integral anterior es, efectivamente, cero. Para eso, vamos primero a considerar la función $F(z, x)$ que definiremos a continuación,

$$F(z, x) := \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^n} \quad (6.59)$$

y vamos a calcular su derivada pero respecto de la variable z ,

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^n} \frac{d}{dz} \left(\frac{xz}{1-z} \right) + \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2 z^n} - n \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}. \quad (6.60)$$

Factoricemos ahora, de la expresión anterior, el término $e^{-xz/(1-z)}/(1-z)z^{n+1}$, con lo cual se obtiene

$$\frac{dF}{dz} = \left[-z \frac{d}{dz} \left(\frac{xz}{1-z} \right) + \frac{z}{1-z} - n \right] \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}, \quad (6.61)$$

y si, finalmente, desarrollamos la derivada indicada entre paréntesis, obtenemos

$$\frac{dF}{dz} = \left[-\frac{xz}{1-z} - \frac{xz^2}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} - n \right] \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}, \quad (6.62)$$

lo cual puede escribirse de manera más compacta como

$$\frac{dF}{dz} = - \left[\frac{xz^2}{(1-z)^2} - \frac{(1-x)z}{1-z} + n \right] \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}. \quad (6.63)$$

No es difícil darse cuenta de que esta última expresión corresponde exactamente (salvo el signo menos global) al integrando en la expresión (6.58), lo que implica que dicha igualdad es equivalente a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dF}{dz} dz = 0. \quad (6.64)$$

Como la integral se realiza a lo largo de un trayecto cerrado, quiere decir que el resultado de la integral, que es $F(z, x)$, tiene que ser evaluado en el punto final e inicial, que resultan ser el mismo punto, indicando que la integral es, en efecto, nula. Esto muestra, entonces, que las funciones $L_n(x)$ representadas a través de la integral compleja de la ecuación (6.55) son soluciones de la ecuación diferencial de Laguerre.

Ecuación de Laguerre y solución como representación integral

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad (6.65)$$

$$L_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz. \quad (6.66)$$

Fórmula de Rodrigues y el desarrollo en serie

Vamos ahora, a partir de la representación integral de L_n , a deducir algunas propiedades de dichas funciones. Comenzaremos estableciendo la fórmula de Rodrigues para que, a partir de esta, obtengamos una representación en serie de las funciones L_n .

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre $L_n(x)$ se obtiene a partir de la representación integral

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz, \quad (6.67)$$

por medio de un cambio de variables. Sea s una nueva variable compleja tal que su relación con la variable de integración z está dada por

$$z = \frac{s-x}{s}, \quad \Rightarrow \quad s = \frac{x}{1-z}.$$

Ahora hay que notar que esta definición nos lleva a las siguientes expresiones,

$$s-x = sz = \frac{xz}{1-z}, \quad dz = \frac{x}{s^2} ds,$$

con lo cual, se puede ver que la integral (6.67) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{x-s}}{\left(\frac{x}{s}\right) \left(\frac{s-x}{s}\right)^{n+1}} \frac{x}{s^2} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{s^n e^{x-s}}{(s-x)^{n+1}} ds. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Esta última se puede escribir de una manera más adecuada si factorizamos de la integral e^x , de lo que obtenemos

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}} ds, \quad (6.69)$$

en donde hemos agregado un $n!$ tanto en el numerador como en el denominador. Esto último se hizo para reconocer la fórmula integral de Cauchy para la n -ésima derivada de una función. En efecto, no es difícil darse cuenta de que la integral anterior puede ser remplazada por la n -ésima derivada del factor $s^n e^{-s}$, evaluada en $s = x$, es decir,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(s^n e^{-s} \right) \Big|_{s=x}, \quad (6.70)$$

lo que, de hecho, se puede escribir como si deriváramos directamente la función entre paréntesis pero usando la variable x , esto es,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad (6.71)$$

lo que constituye la fórmula de Rodrigues para los polinomios $L_n(x)$ de Laguerre. En este punto, podemos apreciar que las funciones $L_n(x)$ son, en efecto, polinomios. Esto es claro por el hecho de que aparecen las funciones e^x y e^{-x} dentro y fuera de la derivada respectivamente. Este hecho asegura que dichas funciones se anularán una vez que se concluye el procedimiento de derivación. No obstante, es mucho más fácil observar que las funciones $L_n(x)$ son polinomios si obtenemos una representación como desarrollo en serie de potencia.

En el cuadro 6.2, se presentan las expresiones explícitas de los primeros ocho polinomios de Laguerre. En la figura 6.4, podemos apreciar las gráficas de los primeros polinomios de Laguerre en un intervalo finito no negativo. Hay que recordar que los polinomios de Laguerre están definidos de tal manera que son ortogonales con un producto interno a lo largo del semi-eje real positivo.

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$
7	$\frac{1}{5040}(x^7 - 49x^6 + 8820x^5 - 7350x^4 + 29400x^3 - 52920x^2 + 35280x - 5040)$

Cuadro 6.2: Polinomios de Laguerre. En el cuadro se muestran las expresiones explícitas de los primeros ocho polinomios de Laguerre.

Para obtener un desarrollo en serie de potencias, podemos usar la fórmula de Rodrigues y aplicar la fórmula de Leibniz para la n -ésima derivada de un producto de funciones,

$$\frac{d^n}{dx^n} (A(x)B(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k A}{dx^k} \frac{d^{n-k} B}{dx^{n-k}}. \quad (6.72)$$

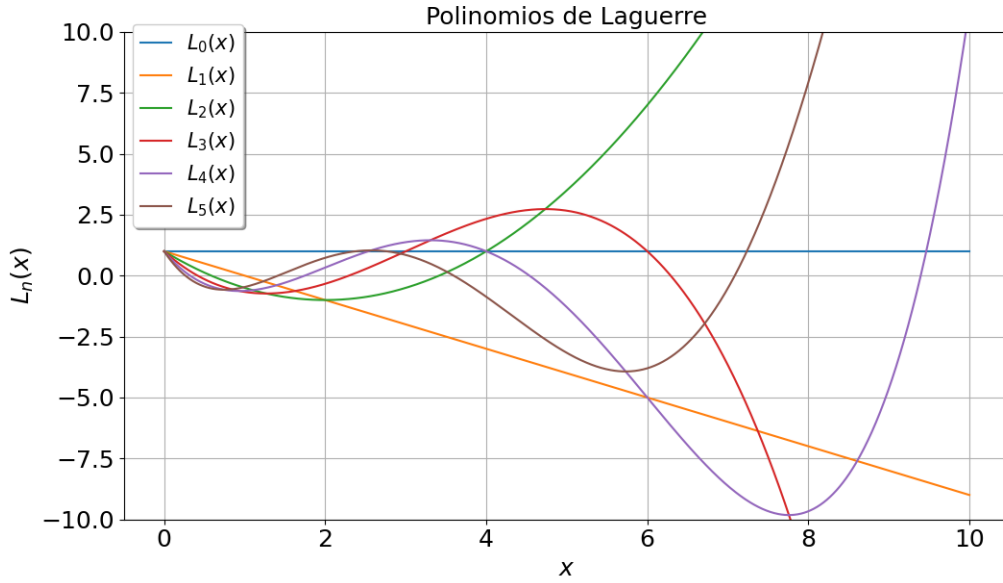


Figura 6.4: Polinomios de Laguerre. En la figura se muestran las gráficas de los primeros seis polinomios de Laguerre: $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, $L_4(x)$ y $L_5(x)$.

Aplicando la fórmula anterior al producto de x^n con e^{-x} en la fórmula de Rodrigues para $L_n(x)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k x^n}{dx^k} \frac{d^{n-k} e^{-x}}{dx^{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}, \end{aligned} \quad (6.73)$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación (6.71), tenemos que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n! (-1)^{n-k}}{k!(n-k)!(n-k)!} x^{n-k}, \quad (6.74)$$

lo que constituye una forma del desarrollo en serie de potencias de las funciones $L_n(x)$ que hemos introducido, inicialmente, a través de una representación integral. Es necesario hacer notar que, como ya lo habíamos anticipado, las funciones L_n son polinomios de orden n , algo que se refleja claramente en el desarrollo en serie finito de la expresión anterior.

Fórmula de Rodrigues y el desarrollo en serie de los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right), \quad (6.75)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n! (-1)^{n-k}}{k! (n-k)! (n-k)!} x^{n-k}. \quad (6.76)$$

Función generatriz y relaciones de recurrencia

Vamos ahora a obtener la función generatriz de los polinomios de Laguerre. La forma en la que se puede obtener esta función es a través de la representación integral dada inicialmente como solución de la ecuación de Laguerre [c.f. Ec. (6.66)], esto es,

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz. \quad (6.77)$$

No es difícil darse cuenta de que esta integral tiene la forma de integral de Cauchy, por lo que la identificación de la expresión anterior con una derivada n -ésima es directa,

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz = \left. \frac{\partial^n G}{\partial t^n} \right|_{t=0}, \quad (6.78)$$

donde $G = G(x, t)$ es la función definida como

$$G(x, t) := \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}, \quad (6.79)$$

lo significa que las funciones $L_n(x)$ se pueden obtener derivando sucesivamente la función G como sigue,

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n G}{\partial t^n} \right|_{t=0}. \quad (6.80)$$

De este modo, es claro que las funciones $L_n(x)$ resultan ser los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de la función $G(x, t)$ respecto a la variable t ,

$$G(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \quad (6.81)$$

Ya que tenemos una expresión para la función generatriz de los polinomios de Laguerre podemos proceder a obtener las relaciones en la forma usual, es decir, derivando la función $G(x, t)$ respecto de sus variables y comparando los desarrollos en serie obtenidos.

Comencemos derivando $G(x, t)$ respecto a la variable t . Haciendo esto obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^2} - \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \frac{d}{dt} \left(\frac{-xt}{1-t} \right) \\ &= \frac{G(x, t)}{1-t} - G(x, t) \frac{d}{dt} \left(\frac{xt}{1-t} \right) \\ &= \frac{G(x, t)}{1-t} - \frac{x}{1-t} G(x, t) - \frac{xt}{(1-t)^2} G(x, t).\end{aligned}\tag{6.82}$$

Si ahora multiplicamos la igualdad anterior por $(1-t)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}(1-2t+t^2) \frac{\partial G}{\partial t} &= (1-x)(1-t)G(x, t) - xtG(x, t) \\ &= (1-x-t+xt)G(x, t) - xtG(x, t),\end{aligned}\tag{6.83}$$

o bien, simplificando

$$(1-2t+t^2) \frac{\partial G}{\partial t} = (1-x-t)G(x, t).\tag{6.84}$$

Vamos ahora a sustituir, en la expresión anterior, la función $G(x, t)$ y su derivada por sus correspondientes desarrollos en serie, esto es

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n,\tag{6.85}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}(x) t^n,\tag{6.86}$$

con lo cual se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1-2t+t^2) L_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x-t) L_n(x) t^n.\tag{6.87}$$

Si separamos las sumas, podemos ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n L_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) L_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^{n+1}.$$

Vamos a hacer el corrimiento de índices $k = n + 1$ donde tengamos la serie con potencias de la forma t^{n+1} , y el corrimiento de índices $k = n - 1$ donde tengamos la serie con

potencias de la forma t^{n-1} . En estos casos debemos sustituir n por $k-1$ o por $k+1$ según corresponda. Tendremos, entonces, que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)L_{k+1}(x)t^k - \sum_{n=0}^{\infty} 2nL_n(x)t^n + \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)L_{k-1}(x)t^k = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)L_n(x)t^n - \sum_{k=0}^{\infty} L_{k-1}(x)t^k, \quad (6.88)$$

o bien, sustituyendo la variable k por la variable n , se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)L_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2nL_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)L_{n-1}(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)L_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n. \quad (6.89)$$

Esta última igualdad nos muestra, al comparar coeficientes, que los polinomios de Laguerre satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1}(x) - 2nL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = (1-x)L_n(x) - L_{n-1}(x), \quad (6.90)$$

o bien, reduciendo términos semejantes y acomodando términos, se tiene que

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (1-x+2n)L_n(x) - nL_{n-1}(x). \quad (6.91)$$

Para obtener una segunda relación de recurrencia vamos a obtener, primero, una identidad para la función generatriz $G(x, t)$ que mezcla las primeras derivadas parciales en una igualdad. Comencemos derivando $G(x, t)$ respecto a x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{t}{1-t} \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)} \\ &= \frac{t}{1-t} G(x, t), \end{aligned}$$

lo que se puede escribir alternativamente como

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{t}{1-t} G(x, t). \quad (6.92)$$

Antes de usar esta expresión para desarrollar G en términos de los polinomios de Laguerre, tenemos que observar que

$$x \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{xt}{1-t} G(x, t). \quad (6.93)$$

Por otro lado, si recordamos la identidad obtenida al derivar respecto a t (cf. ec. 6.84),

$$(1-t)^2 \frac{\partial G}{\partial t} = (1-x-t)G(x, t)$$

podemos ver que

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{1-t-x}{1-t}G(x,t) \\ &= G(x,t) - \frac{x}{1-t}G(x,t),\end{aligned}$$

identidad que al multiplicarla por t queda de la forma

$$t(1-t)\frac{\partial G}{\partial t} = tG(x,t) - \frac{xt}{1-t}G(x,t),$$

o bien, de manera equivalente como

$$\frac{xt}{1-t}G(x,t) = tG(x,t) - t(1-t)\frac{\partial G}{\partial t},$$

Combinando esta última igualdad con la expresión (6.92), se tiene que

$$x\frac{\partial G}{\partial x} = tG(x,t) - t(1-t)\frac{\partial G}{\partial t}. \quad (6.94)$$

No es difícil observar que esta última igualdad se puede reescribir como

$$x\frac{\partial G}{\partial x} = t\frac{\partial G}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial t}(tG). \quad (6.95)$$

Por otro lado, los desarrollos en serie de $\partial_x G$ y $\partial_t G$ y de $\partial_t(tG)$ se escriben en términos de los polinomios de Laguerre como

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n, \quad (6.96)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1}, \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial(tG)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)L_n(x)t^n, \quad (6.98)$$

los que, al sustituirse en la identidad (6.95), arrojan la siguiente igualdad,

$$\sum_{n=0}^{\infty} xL'_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)L_n(x)t^{n+1}. \quad (6.99)$$

Para hacer que las series tengan como potencia común t^n , solamente hay que cambiar el índice n por $k-1$ en la última serie de la ecuación anterior. Haciendo esto tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} xL'_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nL_n(x)t^n - \sum_{k=0}^{\infty} kL_{k-1}(x)t^k. \quad (6.100)$$

Y al cambiar la variable k por n se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x L'_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} n L_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n L_{n-1}(x) t^n. \quad (6.101)$$

Esta última igualdad nos permite comparar los coeficientes de t^n , lo que nos da una nueva relación de recurrencia, la cual se escribe finalmente como

$$x L'_n(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x). \quad (6.102)$$

Función generatriz de los polinomios de Laguerre

$$G(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n. \quad (6.103)$$

Relaciones de recurrencia de los polinomios de Laguerre

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (1-x+2n) L_n(x) - n L_{n-1}(x), \quad (6.104)$$

$$x L'_n(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x). \quad (6.105)$$

Ortogonalidad

Para desarrollar la ortogonalidad de los polinomios de Laguerre hay que retomar la ecuación de Laguerre y escribirla en su forma autoconjugada. Tal como vimos al inicio de esta sección, la ecuación de Laguerre se escribe como

$$x y'' + (1-x) y' + n y = 0, \quad (6.106)$$

donde hemos supuesto que $n \in \mathbb{N}_0$. Podemos observar que, para esta ecuación diferencial, los coeficientes p_1 y p_2 están dados por

$$p_2(x) = x, \quad p_1(x) = 1 - x.$$

Esto quiere decir que el factor que lleva la ecuación de Laguerre a la forma Sturm-Liouville se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \frac{1}{x} \exp \left(\int^x \frac{1-x'}{x'} \right) = \frac{1}{x} \exp \left(\int^x \left(\frac{1}{x'} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{x} \exp (\ln(x) - x),\end{aligned}\tag{6.107}$$

o bien, de manera equivalente, tenemos que

$$\omega(x) = e^{-x}.\tag{6.108}$$

Con esto tenemos que, al multiplicar la ecuación (6.106) por $\omega(x) = e^{-x}$, toma la forma

$$\frac{d}{dx} \left(x e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) = -n e^{-x} y(x).\tag{6.109}$$

Esta última ecuación tiene la forma Sturm-Liouville y sus soluciones siguen siendo los polinomios de Laguerre. Esta forma de la ecuación diferencial nos permite ver que la función de peso viene dada por $w(x) = e^{-x}$, lo que nos indica dos cosas. Primero, como la función de peso desaparece el $x = 0$ y $x = +\infty$ tenemos que la condición de ortogonalidad se cumple en el intervalo $[0, \infty)$. Segundo, al ser la función de peso dada por $w(x) = e^{-x}$, tenemos que el producto interno entre dos funciones, digamos u y v , vendrá dado por la expresión

$$\langle u|v \rangle := \int_0^\infty u(x)v(x)e^{-x}dx,$$

hechos que se desprenden directamente de la teoría de Sturm-Liouville. Una vez que hemos identificado todos los elementos que intervienen para describir la ortogonalidad, tenemos que los polinomios de Laguerre satisfacen la siguiente relación,

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = N_n^2\delta_{n,m},\tag{6.110}$$

siendo N_n^2 la norma cuadrada de los polinomios de Laguerre que vamos a calcular a continuación.

Para calcular la norma cuadrada de los polinomios de Laguerre, vamos a seguir la misma estrategia utilizada en los casos anteriores, técnica que consiste, básicamente, en calcular la integral del cuadrado de la función generatriz por la función de peso, tal como se realiza a continuación,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G^2(x,t)e^{-x}dx &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} \right)^2 e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-2xt/(1-t)}}{(1-t)^2} e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-(1+2t/(1-t))x}}{(1-t)^2} dx.\end{aligned}\tag{6.111}$$

Esta integral es fácil de evaluar, ya que el integrando es simplemente una función exponencial. En efecto, no es difícil ver que

$$\int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx = \frac{1}{(1-t)^2} \frac{1}{1+2t/(1-t)}, \quad (6.112)$$

lo cual, al hacer un poco de álgebra, se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx &= \frac{1}{(1-t)^2} \frac{1-t}{(1-t) + 2t} \\ &= \frac{1}{(1-t)(1+t)}, \end{aligned} \quad (6.113)$$

o bien,

$$\int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx = \frac{1}{1-t^2}. \quad (6.114)$$

Por otro lado, la misma integral se puede realizar haciendo uso del desarrollo en serie en términos de los polinomios de Laguerre, esto es,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty L_n(x) t^n \right)^2 e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty L_n(x) L_m(x) t^{n+m} e^{-x} dx. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Por la propiedad de ortogonalidad queda claro que la integral que aparece en la expresión anterior queda en términos de una delta de Kronecker, lo que eventualmente elimina una de la suma, explícitamente tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty t^{n+m} \int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty t^{n+m} N_n^2 \delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (6.116)$$

lo cual se reduce a

$$\int_0^\infty G^2(x, t) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^\infty N_n^2 t^{2n}. \quad (6.117)$$

Las identidades (6.114) y (6.117) nos indican que debe valer la siguiente identidad,

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^\infty N_n^2 t^{2n}, \quad (6.118)$$

lo que sugiere que, para encontrar una expresión para la constante N_n^2 , hay que desarrollar la función en el miembro izquierdo de la ecuación como una serie de potencias de t . No es difícil darse cuenta de que el desarrollo en serie que buscamos corresponde a una serie geométrica, de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} N_n^2 t^{2n}. \quad (6.119)$$

Esta última igualdad indica claramente que la norma cuadrada de los polinomios de Laguerre, N_n^2 , es simplemente la unidad. En otras palabras, podemos decir sencillamente que las funciones L_n son *ortonormales*, ya que dichas funciones tienen norma unitaria.

Ortogonalidad de los polinomios de Laguerre

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{n,m}. \quad (6.120)$$

A manera de resumen, a continuación, presentaremos las diferentes representaciones que hemos deducido para los polinomios de Laguerre.

Representaciones de los polinomios de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right), \quad (6.121)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n! (-1)^{n-k}}{k! (n-k)! (n-k)!} x^{n-k}. \quad (6.122)$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz. \quad (6.123)$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint \frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}} ds. \quad (6.124)$$

6.1.3. Polinomios asociados de Laguerre

Ecuación asociada de Laguerre

Los polinomios de Laguerre son parte de una familia más grande de funciones, denominadas *funciones asociadas de Laguerre* o *polinomios asociados de Laguerre*, llamados también de esa forma debido a que las funciones que obtendremos son, justamente, polinomios.

Las funciones asociadas de Laguerre se definen a través de derivadas de los polinomios de Laguerre como sigue,

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(L_{n+k}(x) \right). \quad (6.125)$$

Una de las primeras cosas que podemos notar de esta definición es que el caso $k = 0$ corresponde a los polinomios de Laguerre. Para valores de k superiores tenemos que las funciones siguen siendo polinomios, pues $L_n^k(x)$ no es más que la k -ésima derivada de un polinomio. Más aún, debido a que L_{n+k} es un polinomio (de Laguerre) de orden $n+k$, la k -ésima derivada es un polinomio de orden n . Esto significa que las funciones $L_n^k(x)$ siguen siendo polinomios de orden n .

En lo que sigue, vamos a desarrollar diferentes propiedades de las funciones $L_n^k(x)$ basándonos principalmente en las propiedades ya presentadas de los polinomios de Laguerre. Comencemos obteniendo la ecuación diferencial correspondiente. Para este propósito, primero, escribimos la ecuación de Laguerre sustituyendo n por $n+k$, esto es,

$$x \frac{d^2 L_{n+k}}{dx^2} + (1-x) \frac{d L_{n+k}}{dx} + (n+k) L_{n+k}(x) = 0. \quad (6.126)$$

El siguiente paso que vamos a ejecutar consiste en derivar k veces la igualdad anterior, apoyándonos, por supuesto, en la fórmula de Leibniz para la k -ésima derivada de un producto, la cual se escribe como

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(A(x) B(x) \right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j A}{dx^j} \frac{d^{k-j} B}{dx^{k-j}}. \quad (6.127)$$

Apliquemos esta fórmula a los primeros dos términos de la igualdad (6.126). Para el primer

término obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d^k}{dx^k} \left(x \frac{d^2 L_{n+k}}{dx^2} \right) &= x \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d^2 L_{n+k}}{dx^2} \right) + k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{d^2 L_{n+k}}{dx^2} \right) \\
 &= x \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} \right) + k \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k L_{n+k}}{dx^k} \right) \\
 &= (-1)^n \left[x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2} + k \frac{d L_n^k}{dx} \right], \tag{6.128}
 \end{aligned}$$

en donde hemos identificado la k -ésima derivada de L_{n+k} con $(-1)^k L_n^k$. Para el segundo término de la igualdad (6.126) tenemos algo similar

$$\begin{aligned}
 \frac{d^k}{dx^k} \left((1-x) \frac{d L_{n+k}}{dx} \right) &= (1-x) \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{d L_{n+k}}{dx} \right) - k \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{d L_{n+k}}{dx} \right) \\
 &= (-1)^k \left[(1-x) \frac{d L_n^k}{dx} - k L_n^k(x) \right]. \tag{6.129}
 \end{aligned}$$

Con estos resultados podemos ya escribir lo que se obtiene al derivar k veces, término a término, la ecuación (6.126),

$$(-1)^n \left[x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2} + k \frac{d L_n^k}{dx} \right] + (-1)^k \left[(1-x) \frac{d L_n^k}{dx} - k L_n^k(x) \right] + (-1)^k (n+k) L_n^k(x) = 0, \tag{6.130}$$

o bien, simplificando la expresión anterior tenemos que

$$x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2} + k \frac{d L_n^k}{dx} + (1-x) \frac{d L_n^k}{dx} - k L_n^k(x) + (n+k) L_n^k(x) = 0, \tag{6.131}$$

lo cual se puede reescribir como

$$x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2} + (1+k-x) \frac{d L_n^k}{dx} + n L_n^k(x) = 0. \tag{6.132}$$

Hay que observar, además, que los polinomios asociados de Laguerre, que resuelven la ecuación anterior, tienen un representación como desarrollo en serie de potencias que se obtiene directamente del desarrollo en serie de los polinomios de Laguerre. Debido a la definición de L_n^k ,

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(L_{n+k}(x) \right), \tag{6.133}$$

podemos escribir directamente la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned}
 L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{s=0}^{n+k} \frac{(n+k)! (-1)^{n+k-s}}{s! (n+k-s)! (n+k-s)!} x^{n+k-s} \right) \\
 &= \sum_{s=0}^n \frac{(n+k)! (-1)^{n-s}}{s! (n+k-s)! (n+k-s)!} \frac{(n+k-s)!}{(n-s)!} x^{n-s}, \tag{6.134}
 \end{aligned}$$

en donde hemos hecho uso del desarrollo en serie de potencias para $L_n(x)$ dado en la ecuación (6.76). Simplificando un poco más el desarrollo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= \sum_{s=0}^n \frac{(n+k)!(-1)^{n-s}}{s!(n+k-s)!(n-s)!} x^{n-s}, \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{(n+k)!(-1)^m}{(n-m)!(m+k)!m!} x^m. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Esta última expresión para el desarrollo en serie se obtuvo remplazando el índice s por $n-m$.

Ecuación asociada de Laguerre

$$x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2} + (1+k-x) \frac{dL_n^k}{dx} + nL_n^k(x) = 0. \quad (6.136)$$

Polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(n+k)!(-1)^m}{(n-m)!(m+k)!m!} x^m. \quad (6.137)$$

Representación integral y fórmula de Rodrigues

Vamos ahora a deducir una expresión para la función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre. Para este propósito, usaremos la representación integral de los polinomios de Laguerre. Recordemos que la fórmula integral para los polinomios de Laguerre está dada por

$$L_n(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}} dz, \quad (6.138)$$

donde γ es una curva cerrada que contiene al origen pero no contiene ningún punto del círculo unitario $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ del plano complejo. Resulta claro entonces que

$$L_{n+k}(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+k+1}} dz. \quad (6.139)$$

De modo que los polinomios asociados de Laguerre se escriben, de acuerdo con la definición (6.125), como

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+k+1}} dz \right). \quad (6.140)$$

De este modo, conmutando los operadores de derivada e integral, obtenemos que

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+k+1}} \right) dz \\ &= (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-1)^k z^k e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1} z^{n+k+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1} z^{n+1}} dz. \end{aligned} \quad (6.141)$$

Es decir, la representación integral de los polinomios asociados de Laguerre está dada por la siguiente expresión

$$L_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1} z^{n+1}} dz. \quad (6.142)$$

Esta representación integral de $L_n^k(x)$ se puede modificar en la misma forma que lo hicimos para L_n a través de un cambio de variable para eventualmente obtener una fórmula de Rodrigues. De hecho, si hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{s-x}{s} = 1 - \frac{x}{s}, \quad \implies \quad s-x = \frac{xz}{1-z}, \quad \implies \quad dz = \frac{x}{s^2} ds, \quad \implies \quad 1-z = \frac{x}{s},$$

en la integral (6.142), entonces, la representación integral de L_n^k puede reescribirse como

$$L_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-(s-x)}}{\left(\frac{x}{s}\right)^{k+1} \left(\frac{s-x}{s}\right)^{n+1}} dz. \quad (6.143)$$

Si, finalmente, hacemos algunas manipulaciones algebraicas, es sencillo ver que la expresión anterior nos conduce a la siguiente identidad,

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-(s-x)}}{\left(\frac{x}{s}\right)^{k+1} \left(\frac{s-x}{s}\right)^{n+1}} \frac{x ds}{s^2} \\ &= \frac{e^x}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{s^{n+k} e^{-s}}{x^k (s-x)^{n+1}} ds \\ &= (x^{-k} e^x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{s^{n+k} e^{-s}}{(s-x)^{n+1}} ds. \end{aligned} \quad (6.144)$$

Tenemos que observar que esta última integral de contorno puede interpretarse como la derivada k -ésima de una función compleja si invocamos la bien conocida fórmula integral de Cauchy. Solo para recordar, si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y si γ es un contorno cerrado simple en D , entonces,

$$\left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}. \quad (6.145)$$

Es fácil ver que si tomamos a $f(s)$ como $f(s) = s^{n+k}e^{-s}$ en la ecuación (6.144), entonces,

$$\begin{aligned} L_n^k(x) &= (x^{-k}e^x) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-x)^{n+1}} ds. \\ &= (x^{-k}e^x) \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} (s^{n+k}e^{-s}) \Big|_{s=x}, \end{aligned} \quad (6.146)$$

o bien,

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k}e^{-x}), \quad (6.147)$$

que es la fórmula de Rodrigues para los polinomios asociados de Laguerre.

Como resultado adicional de este análisis no es difícil darse cuenta de que la representación integral de $L_n^k(x)$,

$$L_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}z^{n+1}} dz, \quad (6.148)$$

nos arroja, directamente, por medio de la fórmula integral de Cauchy, la función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre,

$$G_k(x, t) := \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n. \quad (6.149)$$

Ortogonalidad

Exploraremos, ahora, la ortogonalidad de los polinomios asociados de Laguerre. Para desarrollar la ortogonalidad de estas funciones, el paso obligado es escribir la ecuación de Laguerre en la forma Sturm-Liouville. De la ecuación (6.136), podemos ver inmediatamente que $p_2(x) = x$ y $p_1(x) = 1 + k - x$, de modo que el factor que transforma la

ecuación (6.136) a su forma Sturm-Liouville está dado por

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \frac{1}{x} e \exp \left(\int^x \frac{1+k-x'}{x'} dx' \right) \\ &= \frac{1}{x} e \exp \left((1+k) \ln(x) - x \right),\end{aligned}\quad (6.150)$$

lo que puede escribirse simplemente como

$$\omega(x) = x^k e^{-x}.\quad (6.151)$$

Con este resultado, tenemos que la ecuación asociada de Laguerre se escribe, en su forma Sturm-Liouville, como

$$\frac{d}{dx} \left(x^{k+1} e^{-x} \frac{dL_n^k}{dx} \right) = -n x^k e^{-x} L_n^k(x) \quad (6.152)$$

Al igual que en el caso de los polinomios de Laguerre, los polinomios asociados de Laguerre son ortogonales en el mismo intervalo. Esto se debe a que la función

$$p(x) = x^{k+1} e^{-x},$$

es una función que se anula en los extremos del intervalo semi-infinito $[0, \infty)$, lo que basta para garantizar la ortogonalidad de las funciones $L_n^k(x)$ respecto del índice n y con función de peso $x^k e^{-x}$. Esto quiere decir, entonces, que los polinomios asociados de Laguerre satisfacen la siguiente regla de ortogonalidad,

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) dx = N_{n,k}^2 \delta_{n,m}.\quad (6.153)$$

Para calcular la norma de los polinomios asociados de Laguerre procedemos de la misma forma en que hallamos la norma de los polinomios de Laguerre L_n , esto es, calculamos la integral del cuadrado de la función generatriz de $L_n^k(x)$ multiplicada, por supuesto, por la correspondiente función de peso. Primero, recordemos que la función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre viene dada por

$$G_k(x, t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) t^n.\quad (6.154)$$

Por un lado, es posible ver que la integral

$$I_k := \int_0^\infty G_k^2(x, t) x^k e^{-x} dx,\quad (6.155)$$

se puede resolver exactamente debido a que el integrando resulta ser una función exponencial por una potencia de la variable independiente,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\infty \frac{e^{-2xt/(1-t)}}{(1-t)^{2k+2}} x^k e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(1-t)^{2k+2}} \int_0^\infty x^k e^{-(1+\xi)x} dx, \end{aligned} \quad (6.156)$$

donde hemos denotado por ξ la cantidad $\xi = 2t/(1-t)$, por comodidad para la realización de los cálculos que siguen. Debemos darnos cuenta de que a esta última integral le falta muy poco para ser una función gamma. De hecho, si hacemos el cambio de variable $s = (1+\xi)x$ podemos ver que

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{(1-t)^{2k+2}} \int_0^\infty \frac{s^k}{(1+\xi)^{k+1}} e^{-s} ds \\ &= \frac{1}{(1-t)^{2k+2}} \frac{1}{(1+\xi)^{k+1}} \int_0^\infty s^k e^{-s} ds, \end{aligned} \quad (6.157)$$

en la que podemos reconocer la función gamma como resultado de la última integración. Entonces es claro que

$$I_k = \frac{1}{(1-t)^{2k+2}} \frac{k!}{(1+\xi)^{k+1}}, \quad (6.158)$$

y recordando que $\xi = 2t/(1-t)$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{(1-t)^{2k+2}} \frac{k!}{(1+2t/(1-t))^{k+1}} \\ &= \frac{k!}{(1-t)^{2k+2}} \frac{(1-t)^{k+1}}{(1-t+2t)^{k+1}}, \end{aligned} \quad (6.159)$$

lo cual, después de simplificar, puede escribirse finalmente como

$$I_k = \frac{k!}{(1-t^2)^{k+1}}. \quad (6.160)$$

Por otro lado, tenemos que la misma integral se puede obtener alternativamente usando el desarrollo en serie para $G_k(x, t)$. Sustituyendo la serie en la integración obtenemos

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty L_n^k(x) t^n \right) x^k e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) t^{n+m} x^k e^{-x} dx. \end{aligned} \quad (6.161)$$

Además, si recordamos la regla de ortogonalidad que ya obtuvimos gracias a la teoría de Sturm-Liouville, resulta claro que

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_0^{\infty} L_n^k(x) L_m^k(x) x^k e^{-x} dx. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^{n+m} N_{n,k}^2 \delta_{n,m}, \end{aligned} \quad (6.162)$$

lo que finalmente da el resultado

$$I_k = \sum_{n=0}^{\infty} N_{n,k}^2 t^{2n}. \quad (6.163)$$

Recordando ahora el resultado de I_k obtenido por la primera vía dado en la ecuación (6.160), podemos proceder a la comparación directamente, de lo que se obtiene

$$\frac{k!}{(1-t^2)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} N_{n,k}^2 t^{2n}. \quad (6.164)$$

Para hallar los coeficientes $N_{n,k}^2$ solo tenemos que desarrollar la expresión en el miembro izquierdo de la igualdad como una serie de potencias de t . Si observamos que la función $k!/(1-x)^{k+1}$ es la k -ésima derivada de la función $1/(1-x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} &= \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \end{aligned} \quad (6.165)$$

de modo que

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n. \quad (6.166)$$

Al sustituir la variable x por t^2 resulta claro que

$$\frac{k!}{(1-t^2)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} t^{2n}, \quad (6.167)$$

y, en vista de la igualdad (6.164), es claro que la norma cuadrada de los polinomios asociados de Laguerre, $N_{n,k}^2$, viene dada por

$$N_{n,k}^2 = \frac{(n+k)!}{n!}, \quad (6.168)$$

o bien, escribiendo explícitamente la identidad anterior en términos de integrales (o producto interno) tenemos que

$$\int_0^\infty L_n^k(x) L_m^k(x) x^k e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{n,m}. \quad (6.169)$$

6.2. Funciones hipergeométricas

De acuerdo con Jacques Dutka en su trabajo “The early history of the hypergeometric function” [18], las funciones hipergeométricas fueron, al parecer, introducidas por John Wallis en su libro *Arithmetica Infinitorum* [66] en el año 1655. En su libro, Wallis estudió problemas concernientes a la interpolación de algunas sucesiones de números reales, tratando de obtener expresiones analíticas para valores no enteros de algunas sucesiones conocidas en la época. Particularmente, se interesó por algunas sucesiones que no seguían una regla geométrica, sino ciertas progresiones que él denominó “hipergeométricas” por tener la característica especial de que los multiplicadores sucesivos no son iguales [1]. Como curiosidad histórica, vale la pena resaltar que, en una famosa carta a Oldenburg del 24 de octubre de 1676, Newton hace mención de cómo ha usado los métodos de interpolación de Wallis para el desarrollo del su famoso Teorema del binomio [18].

Al trabajo de Wallis, le sucedieron los estudios de Euler, Gauss, Kummer, Stirling, Riemann, entre muchos otros autores que contribuyeron a la construcción de la teoría de las funciones hipergeométricas. No obstante, al parecer fue Carl Friedrich Gauss quien realizó el primer estudio sistemático completo de la serie hipergeométrica [25].

En esta sección, vamos a estudiar dos series hipergeométricas, conocidas como la *función hipergeométrica* y la *función hipergeométrica confluyente*. Veremos que estas funciones tienen la cualidad particular de reproducir un gran número de funciones especiales que ya hemos desarrollado. Además de esto, en múltiples ocasiones, varios problemas de la física se pueden resolver a través de las funciones hipergeométricas cuando no es posible establecer soluciones en términos de funciones elementales o funciones especiales ya desarrolladas.

¹Como ejemplo, la sucesión factorial $a_n := n!$ no es una progresión geométrica debido a que $a_{n+1} = na_n$. Esto cabría dentro de la definición de *progresión hipergeométrica* de Wallis.

6.2.1. La función hipergeométrica

Vamos a comenzar estableciendo la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0, \quad (6.170)$$

a la cual, algunas veces se le suele llamar *ecuación de Gauss* y cuyas soluciones son, en consecuencia, denominas *funciones de Gauss* [5]. Una de las soluciones de la ecuación (6.170) es la función hipergeométrica la cual se define como

$${}_2F_1(a, b, c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (6.171)$$

función que se denomina también *serie hipergeométrica*. En este punto, vale la pena hablar un poco sobre la notación de subíndices anterior y posterior que definen la función hipergeométrica. Primero, el subíndice anterior (el que va al frente como en la notación estándar de subíndices) indica la cantidad de parámetros que van, como paréntesis de Pochhammer, en el denominador del coeficiente de la serie. En este caso, dicho subíndice frontal es 1 por lo que solo tenemos un parámetro en el denominador, que es $(c)_n$. Por otro lado, el subíndice posterior (y que es inusual dentro de la notación que se suele usar para definir funciones) indica el número de parámetros que van, como paréntesis de Pochhammer en el numerador del coeficiente. Podemos ver que el subíndice posterior es 2, por lo que tenemos dos parámetros en el numerador, los cuales son $(a)_n$ y $(b)_n$.

A continuación, vamos a mostrar que la ecuación hipergeométrica tiene como solución la serie dada por la ecuación (6.171) usando el método de Frobenius para resolver la ecuación diferencial (6.170).

Comencemos suponiendo que la solución a la ecuación hipergeométrica puede escribirse como un desarrollo en serie de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad (6.172)$$

siendo C_n los coeficientes del desarrollo por ahora desconocidos. Vamos a proceder de la manera usual: vamos a calcular las derivadas de esta última serie, lo sustituiremos en la ecuación hipergeométrica (6.170), y procederemos a hallar una recurrencia para C_n . No es difícil ver que la primera y segunda derivadas de $y(x)$ quedan como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^{n-1}, \quad (6.173)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}. \quad (6.174)$$

Antes de sustituir estas expresiones para las derivadas de $y(x)$ vamos a reescribir la ecuación hipergeométrica de una manera conveniente. Si desarrollamos los productos que involucran la primera y segunda derivadas, obtenemos

$$xy'' - x^2y'' + cy' - (a + b + 1)xy' - aby = 0. \quad (6.175)$$

Centremos nuestra atención, por un momento, en los términos xy'' y y' . Notemos que al sustituir en estos las series (6.173) y (6.174), la potencia de x es de orden $n - 1$, siendo n la variable de sumación. Como ya sabemos, buscamos que la potencia de x en todas las series que aparezcan en la ecuación (6.175) sea n , de modo que tendremos que realizar corrimientos de índices para estos casos específicamente.

Comencemos con el término xy'' y notemos que

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} m(m+1)C_{m+1} x^m, \quad (6.176)$$

en donde hemos realizado el cambio de índice $m = n - 1$. Por otro lado, para y' tenemos que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nC_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (m+1)C_{m+1} x^m, \quad (6.177)$$

en donde hicimos exactamente el mismo cambio de índice que en la serie anterior. Así, al sustituir las series (6.173) y (6.174) en la ecuación hipergeométrica (6.175), obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n(n+1)C_{n+1} - n(n-1)C_n + c(n+1)C_{n+1} - (a+b+1)nC_n - abC_n \right] x^n = 0,$$

en donde hemos factorizado ya la potencia x^n . Ahora, todo lo que resta para satisfacer la igualdad es hacer que cada coeficiente del desarrollo sea cero, es decir,

$$n(n+1)C_{n+1} - n(n-1)C_n + c(n+1)C_{n+1} - (a+b+1)nC_n - abC_n = 0. \quad (6.178)$$

Haciendo un poco de álgebra es posible ver que la expresión anterior resulta en una relación de recurrencia para los coeficientes C_n ,

$$C_{n+1} = \frac{n(n-1) + (a+b+1)n + ab}{n(n+1) + c(n+1)} C_n = 0. \quad (6.179)$$

Esta última expresión se puede reescribir de manera conveniente si notamos que el numerador se puede escribir como sigue,

$$n(n-1) + (a+b+1)n + ab = n^2 + (a+b)n + ab = (n+a)(n+b), \quad (6.180)$$

lo que nos lleva a escribir la recurrencia para C_n como

$$C_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} C_n. \quad (6.181)$$

o bien, de manera equivalente,

$$C_n = \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} C_{n-1}. \quad (6.182)$$

No es difícil resolver esta relación de recurrencia, ya que se puede inferir inmediatamente escribiendo unos cuantos pasos,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} \frac{(n+a-1)(n+b-2)}{(n-1)(n+c-2)} C_{n-2} \\ &= \frac{(n+a-1)(n+b-1)}{n(n+c-1)} \frac{(n+a-1)(n+b-2)}{(n-1)(n+c-2)} \frac{(n+a-3)(n+b-3)}{(n-2)(n+c-3)} C_{n-3} \\ &= \vdots \end{aligned}$$

de manera que no es difícil darse cuenta de que el coeficiente C_n toma la forma

$$C_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{(n+a-k-1)(n+b-k-1)}{(n-k)(n+c-k-1)} \right) C_0. \quad (6.183)$$

Notemos que cada factor en el denominador se puede escribir de manera separada distribuyendo la operación de producto. El resultado de cada elemento de la fracción se podrá escribir haciendo uso de la notación de los *paréntesis de Pochhammer*. Los paréntesis de Pochhammer se definen como sigue: sea $a \in \mathbb{R}$ un número real y sea $n \in \mathbb{N}$ un entero no negativo, entonces, el número $(a)_n$ se define como:

$$(a)_n := a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1) = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = \prod_{k=0}^{n-1} (a+n-k-1). \quad (6.184)$$

Con esta definición es posible ver que el coeficiente C_n puede escribirse como

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(\prod_{k=0}^{n-1} (n+a-k-1)) (\prod_{k=0}^{n-1} (n+b-k-1))}{(\prod_{k=0}^{n-1} (n-k)) (\prod_{k=0}^{n-1} (n+c-k-1))} C_0, \\ &= \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} C_0. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Con este resultado, observamos que una solución de la ecuación hipergeométrica puede escribirse como

$$y(x) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Es fácil notar que cuando tomamos el coeficiente C_0 (la constante de integración) como $C_0 = 1$, entonces, la solución hallada coincide con la función hipergeométrica introducida al inicio de esta sección. La segunda solución linealmente independiente de $y_1(x) = C_0 {}_2F_1(a, b, c; x)$ se puede escribir en términos de la función hipergeométrica, de hecho, no es difícil probar que, esta segunda solución se puede representar como

$$y_2(x) = x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x), \quad (6.186)$$

para valores de c diferentes de $2, 3, 4, \dots$

Es de utilidad, además, conocer las derivadas de la función hipergeométrica. Si tomamos la derivada respecto de x obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned} \quad (6.187)$$

y si hacemos el corrimiento de índices $k = n - 1$, podemos ver que:

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+1} (b)_{k+1}}{(c)_{k+1}} \frac{x^k}{k!}. \quad (6.188)$$

Ahora, analicemos el cociente que involucra los coeficientes de Pochhammer. Primero, notemos que podemos obtener una identidad muy sencilla entre paréntesis de Pochhammer de la siguiente forma:

$$(a)_{k+1} = a(a+1)(a+2) \dots (a+k-1)(a+k) = a(a+1)_k.$$

Esto nos permite escribir, entonces, la derivada de la función hipergeométrica como sigue:

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k (b+1)_k}{(c+1)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (6.189)$$

lo que nos da como resultado la siguiente identidad para la función hipergeométrica:

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; x). \quad (6.190)$$

Esta última expresión se puede generalizar inmediatamente para la n -ésima derivada de ${}_2F_1(a, b, c; x)$. De hecho, no es difícil probar por inducción que:

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} {}_2F_1(a+n, b+n; c+n; x). \quad (6.191)$$

Una de las propiedades importantes de la función hipergeométrica es que varias funciones elementales, así como varias funciones especiales, se pueden expresar en términos de ${}_2F_1(a, b, c; x)$ con valores específicos de sus parámetros. El primer ejemplo es la función logaritmo:

$$\ln(1+x) = x {}_2F_1(1, 1; 2; -x). \quad (6.192)$$

Esta identidad se puede probar a partir del desarrollo en serie de potencias:

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (1)_n}{(2)_n} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \quad (6.193)$$

Notemos que $(1)_n = n!$ y, además, que

$$(2)_n = 2(2+1)(2+2) \dots (2+n-1) = (2)(3)(4) \dots (n+1) = (n+1)!, \quad (6.194)$$

lo cual nos lleva a escribir:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1, 1; 2; -x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Si en esta última serie hacemos el corrimiento de índices $k = n + 1$ obtenemos, entonces:

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{k-1}}{k}. \quad (6.196)$$

Recordando que la función $\ln(1+x)$ se puede desarrollar en serie de potencia como:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad (6.197)$$

es claro que:

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \frac{1}{x} \ln(1+x), \quad (6.198)$$

lo que demuestra la identidad que habíamos presentado.

De hecho, con la función hipergeométrica podemos representar una amplia variedad de funciones. A continuación, damos un listado de algunas funciones especiales que podemos representar en términos de ${}_2F_1(a, b, c; x)$:

i. Polinomios de Legendre $P_n(x)$ y las funciones asociadas de Legendre $P_n^m(x)$:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{1}\right), \quad (6.199)$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!} {}_2F_1\left(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-x}{1}\right). \quad (6.200)$$

ii. La función beta incompleta, que se define como

$$B_x(p, q) := \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (6.201)$$

puede escribirse como

$$B_x(p, q) = \frac{x^p}{p} {}_2F_1(p, 1-q; p+1; x). \quad (6.202)$$

iii. Funciones de Chebyshev $T_n(x)$, $U_n(x)$ y $V_n(x)$ definidos como

$$T_n(\cos(\phi)) = \cos(n\phi), \quad (6.203)$$

$$U_n(\cos(\phi)) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)}, \quad (6.204)$$

$$V_n(\cos(\phi)) = \sin(n\phi), \quad (6.205)$$

tienen las siguientes representaciones en términos de la función hipergeométrica:

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (6.206)$$

$$U_n(x) = (n+1) {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (6.207)$$

$$V_n(x) = n\sqrt{1-x^2} {}_2F_1\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right). \quad (6.208)$$

iv. Los polinomios ultrasféricos $C_n^{(\alpha)}(x)$ (emparentados con los polinomios de Legendre), también llamados polinomios de Gegenbauer, se definen mediante la función generatriz:

$$G(x, t; \alpha) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\alpha)}(x) t^k. \quad (6.209)$$

Lo polinomios ultraesféricos tienen la representación en términos de la función hipergeométrica:

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n+2\alpha}{2^\alpha n! \Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1\left(-n, n+2\alpha+1; 1+\alpha; \frac{1-x}{2}\right). \quad (6.210)$$

v. Las integrales elípticas $K(k)$ y $E(k)$ que se definen como:

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta, \quad (6.211)$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)} d\theta, \quad (6.212)$$

tienen la siguiente representación:

$$K(k) := \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (6.213)$$

$$E(k) := \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (6.214)$$

6.2.2. La función hipergeométrica confluyente

Una función hipergeométrica confluyente es una solución de una ecuación diferencial ordinaria que tiene una *forma degenerada*, es decir, una ecuación diferencial de tipo hipergeométrica, en la que dos de las tres singularidades regulares se fusionan en una singularidad irregular. El término *confluyente* se refiere a la fusión de puntos singulares de familias de ecuaciones diferenciales, y proviene del latín *confluere* que significa “fluir en conjunto” ^[2]. Existen varias formas estándar comunes de funciones hipergeométricas confluentes, entre las que podemos encontrar principalmente las siguientes:

- a. La función $M(a, b, z)$ de Kummer, la que conoceremos, de aquí en adelante, como la *función hipergeométrica confluyente*, introducida por Kummer en 1837 en su trabajo

²De este mismo vocablo latino proviene el verbo en español *confluir* que, de acuerdo con el DRAE ^[11], significa “Dicho de dos o más ríos u otras corrientes de agua: juntarse (|| unirse)”, o bien, “Dicho de dos o más caminos: juntarse (|| unirse)”, lo que igual aplica a la gente, las ideas, las circunstancias o los propósitos. De dicho verbo se desprende la palabra *confluencia* que significa convergencia, unión, coincidencia, concurrencia o congregación entre otras posibles acepciones.

titulado *De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis* [35], la cual es una solución a la ecuación diferencial de Kummer. A esta función también se le suele denominar *función hipergeométrica confluyente de primer tipo*.

- b. La función $U(a, b, z)$ de Tricomi que fue introducida por Francesco Tricomi en el año 1947 en tu trabajo *Funzioni ipergeometriche confluenti* [63], función que, a veces, se denota por $\psi(a; b; z)$, y es, además, otra solución de la ecuación diferencial de Kummer que es linealmente independiente de $M(a, b, z)$. A esta función también se le suele denominar *función hipergeométrica confluyente de segundo tipo*.
- c. La función de Whittaker es una solución especial de la ecuación de Whittaker, una forma modificada de la ecuación hipergeométrica confluyente, la cual fue introducida por Whittaker en 1903 en su trabajo *An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions* [71] para hacer que las fórmulas que involucran las soluciones sean más simétricas.

En lo que sigue, vamos a ocuparnos principalmente de la función de Kummer y brevemente de la función de Tricomi, es decir, de las funciones hipergeométricas confluentes de primer y segundo tipo.

La ecuación de Kummer y la función hipergeométrica confluyente de primer tipo

Comencemos estableciendo la así llamada ecuación de Kummer, que es una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden de la forma:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c - x) \frac{dy}{dx} - ay(x) = 0. \quad (6.215)$$

Una de las soluciones de la ecuación de Kummer es la función hipergeométrica confluyente (de primer tipo) o función de Kummer, la cual está definida como:

$${}_1F_1(a; c; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.216)$$

La notación que hemos usado es la misma que se ha utilizado para definir la función hipergeométrica introducida en la sección 6.2.1. Esto es, la función ${}_1F_1$ nos indica que se trata de una serie, de la gran familia de las series hipergeométricas, que tiene parámetro

contenido en un paréntesis de Pochhammer en el numerador, $(a)_n$, y uno en el denominador, $(c)_n$. Alternativamente, la función hipergeométrica confluyente de primer tipo se suele denotar por $M(a, c, x)$, de modo que

$$M(a, c, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.217)$$

A continuación, vamos a mostrar que la ecuación hipergeométrica tiene como solución la serie dada por la serie hipergeométrica confluyente (6.216) mediante el método de Frobenius para resolver la ecuación diferencial de Kummer (6.215).

Al igual que en el caso de la función hipergeométrica, partimos del supuesto de que la solución de la ecuación hipergeométrica puede escribirse como un desarrollo en serie de la forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad (6.218)$$

siendo C_n los coeficientes del desarrollo por ahora desconocidos. Vamos a proceder de la manera usual: vamos a calcular las derivadas de esta última serie, lo sustituiremos en la ecuación de Kummer (6.215), y procederemos a hallar una recurrencia para C_n . La primera y segunda derivadas de la suposición de $y(x)$ como un desarrollo en serie de potencias nos da lo siguiente:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^{n-1}, \quad (6.219)$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-2}. \quad (6.220)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación hipergeométrica confluyente (6.215) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n n(c-x) x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a C_n x^n = 0. \quad (6.221)$$

Reacomodando los términos en la ecuación anterior podemos ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n(n-1) x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n n c x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a C_n x^n = 0. \quad (6.222)$$

Si cambiamos el índice n por $k + 1$ en las primera dos series de la igualdad anterior, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} k(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1} (k+1)cx^k - \sum_{n=0}^{\infty} C_n nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} aC_n x^n = 0. \quad (6.223)$$

Ahora, como todas las series ya tienen potencia común en la variable x , podemos factorizar para obtener una sola serie como sigue (cambiamos los índices k por n para que todas las series tengan índice de sumación común),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{n+1} n(n+1) + C_{n+1} (n+1)c - C_n n - aC_n \right] x^n = 0. \quad (6.224)$$

Por independencia lineal, es claro que los coeficientes del desarrollo deben ser todos iguales a cero, lo que resulta en una ecuación de recurrencia para los coeficientes C_n ,

$$(n(n+1) + (n+1)c)C_{n+1} - (n+a)C_n = 0, \quad (6.225)$$

o bien,

$$C_{n+1} = \frac{n+a}{(n+1)(n+c)} C_n. \quad (6.226)$$

Si ahora escribimos a C_n en términos de C_{n-1} y a C_{n-1} en términos de C_{n-2} y así sucesivamente,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{n+a-1}{n(n+c-1)} C_{n-1}, \\ C_{n-1} &= \frac{n+a-2}{(n-1)(n+c-2)} C_{n-2}, \\ C_{n-2} &= \frac{n+a-3}{(n-1)(n+c-3)} C_{n-3}. \end{aligned}$$

De modo que podemos inferir que la forma de C_n será

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{(n+a-1)(n+a-2)(n+a-3) \dots (a+1)a}{[n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1][(n+c-1)(n+c-2)(n+c-3) \dots (c+1)c]} C_0 \\ &= \frac{(a)_n}{n!(c)_n} C_0, \end{aligned}$$

en donde hemos identificado los símbolos de Pochhammer $(a)_n$ y $(c)_n$ como los productos

$$\begin{aligned} (a)_n &= (n+a-1)(n+a-2)(n+a-3) \dots (a+1)a, \\ (c)_n &= (n+c-1)(n+c-2)(n+c-3) \dots (c+1)c. \end{aligned}$$

Con lo anterior, queda claro que la solución de la ecuación hipergeométrica confluyente se escribe como:

$$y(x) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.227)$$

Esto coincide, hasta en una constante de integración, con la definición (6.217), con lo que se demuestra que la función hipergeométrica confluyente es, en efecto, una solución de la ecuación de Kummer.

Una forma alternativa de obtener la función de Kummer, deducida mediante la búsqueda de una solución como desarrollo en serie, es a partir de la conexión de la función hipergeométrica confluyente con la función hipergeométrica. Como hemos mencionado al inicio, la ecuación hipergeométrica confluyente adquiere su nombre debido a la confluencia de dos puntos singulares de la ecuación hipergeométrica. Vamos a ver, de manera detallada, cómo ocurre dicha confluencia que nos lleva de la ecuación hipergeométrica a la ecuación de Kummer. Comencemos recordando que la ecuación hipergeométrica está dada por:

$$z(1-z) \frac{dy^2}{dz^2} + [c - (a+b+z)] \frac{dy}{dz} + aby(z) = 0. \quad (6.228)$$

Ahora, haremos una transformación para mover el punto singular regular $z = 1$ al infinito, en donde la ecuación ya tiene un punto singular regular³. Dicha transformación está dada por $z \rightarrow z/b$ y vamos a hacer tender b al infinito, $b \rightarrow \infty$, para que el punto $z = 1$ confluya eventualmente con la singularidad regular $z = \infty$. Si hacemos la sustitución de la variable z por z/b tenemos que la ecuación hipergeométrica se transforma en:

$$\frac{z}{b} \left(1 - \frac{z}{b}\right) b^2 \frac{dy^2}{dz^2} + \left[c - (a+b+1) \frac{z}{b}\right] b \frac{dy}{dz} + aby(z) = 0, \quad (6.229)$$

donde hemos usado del hecho de que:

$$\frac{dy^2}{d(z/b)^2} = b^2 \frac{dy^2}{dz^2}, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d(z/b)} = b \frac{dy}{dz}.$$

Con esto tenemos que la ecuación (6.229) queda de la forma:

$$z \left(1 - \frac{z}{b}\right) \frac{dy^2}{dz^2} + \left[c - \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{1}{b}\right) z\right] \frac{dy}{dz} + ay(z) = 0, \quad (6.230)$$

en la que eliminamos un factor b , factor común en toda la ecuación. Ahora, si tomamos el límite en que b tiende a infinito, obtenemos que los factores z/b , a/b y $1/b$ se hacen cero, de modo que la ecuación resultante es:

$$z \frac{dy^2}{dz^2} + [c - z] \frac{dy}{dz} + ay(z) = 0, \quad (6.231)$$

³Obsérvese que esta ecuación tiene tres puntos singulares regulares: $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$.

la cual es, esencialmente, la ecuación de Kummer. Esto muestra que dicha ecuación tiene como una de sus soluciones la función que se obtiene tomando el límite realizado en la función hipergeométrica. Esto es, la ecuación de Kummer tiene como solución la función

$$y(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(a, b; c; \frac{z}{b} \right).$$

No es difícil probar que este límite corresponde, en realidad, a la función de Kummer o la función hipergeométrica confluyente de primer tipo:

$$M(a, c, z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1 \left(a, b; c; \frac{z}{b} \right). \quad (6.232)$$

Y en este punto, también vale la pena enunciar que la función hipergeométrica confluyente tiene una representación integral de la forma

$$M(a, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad (6.233)$$

Al igual que en el caso de la función hipergeométrica, con la función hipergeométrica confluyente podemos representar una amplia variedad de funciones. A continuación, damos un listado de algunas funciones elementales y especiales que podemos representar en términos de $M(a, c, z)$.

i. La función exponencial:

$$e^z = M(b, b, z). \quad (6.234)$$

ii. La función error: esta se define como una integral indefinida de la función gaussiana, es decir,

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (6.235)$$

Esta función se puede expresar en términos de $M(a, b, z)$ como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right). \quad (6.236)$$

iii. Las funciones de Bessel:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right), \quad (6.237)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2x\right). \quad (6.238)$$

iv. Las funciones de Hermite:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (6.239)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right). \quad (6.240)$$

v. Las funciones de Laguerre y las funciones asociadas:

$$L_n(x) = M(-n, 1, x), \quad (6.241)$$

$$L_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} M(-n, m+1, x). \quad (6.242)$$

vi. La función gamma incompleta: esta se define como:

$$\gamma(a, x) := \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad (6.243)$$

y en términos de la función de Kummer se puede representar como:

$$\gamma(a, x) = x^a M(a, a+1, -x). \quad (6.244)$$

Vamos a mostrar una identidad de las mencionadas arriba, específicamente la que corresponde a la función error. Primero, vamos a comenzar escribiendo el desarrollo en serie de la función error haciendo uso del desarrollo para la función exponencial, es decir,

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad (6.245)$$

con lo cual podemos ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &:= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dt, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt, \end{aligned}$$

esto es, el desarrollo en serie de la función error es

$$\operatorname{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \quad (6.246)$$

Por otro lado, la función hipergeométrica confluyente $M(1/2, 3/2, -x^2)$ está dada por

$$M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{(3/2)_n} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}. \quad (6.247)$$

Analicemos los símbolos de Pochhammer $(1/2)_n$ y $(3/2)_n$. En el primer caso obtenemos

$$\begin{aligned} (1/2)_n &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n-1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)!!}{2^n} \end{aligned} \quad (6.248)$$

y recordando que $(2n-1)!! = (2n)!/2^n n!$, obtenemos que

$$(1/2)_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (6.249)$$

De manera análoga, procedemos con $(3/2)_n$. Podemos ver que en este caso obtenemos

$$\begin{aligned} (3/2)_n &= \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2} + 1\right) \left(\frac{3}{2} + 2\right) \cdots \left(\frac{3}{2} + n - 1\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{7}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n+1)!!}{2^n} \end{aligned} \quad (6.250)$$

y usando nuevamente la identidad $(2n-1)!! = (2n)!/2^n n!$, obtenemos

$$(3/2)_n = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n} n!}. \quad (6.251)$$

Estos resultados nos indican que el cociente $(1/2)_n/(3/2)_n$ puede escribirse como

$$\frac{(1/2)_n}{(3/2)_n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)(2n)!} = \frac{1}{2n+1}. \quad (6.252)$$

Con esto obtenemos que la función $2xM(1/2, 3/2, -x^2)/\sqrt{\pi}$ tiene como desarrollo en serie la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned} \quad (6.253)$$

lo que claramente coincide con el desarrollo en serie de la función error de la ecuación (6.246).

La función de Tricomi

Vamos ahora a desarrollar una segunda solución de la ecuación de Kummer. De hecho, la segunda solución se puede construir con la función hipergeométrica confluyente de manera análoga al caso de la función hipergeométrica. De hecho, no es difícil mostrar que la función

$$y_2(x) = x^{1-b}M(a+1-b, 2-b, x) \quad (6.254)$$

es una solución de la ecuación de Kummer,

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (b-x) \frac{dy}{dx} - ay(x) = 0. \quad (6.255)$$

Mostremos que la función (6.254) es, en efecto, solución de la ecuación diferencial (6.255). Comencemos tomando la primera derivada de $y_2(x)$, pero antes de eso, por comodidad, denotaremos por $y_1(x)$ la función $M(a+1-b, 2-b, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(x^{1-b} y_1(x) \right) \\ &= x^{1-b} y_1'(x) + (1-b)x^{-b} y_1(x). \end{aligned} \quad (6.256)$$

Mientras que la segunda derivada se escribe

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_2}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(x^{1-b} y_1'(x) + (1-b)x^{-b} y_1(x) \right) \\ &= x^{1-b} y_1''(x) + 2(1-b)x^{-b} y_1'(x) - b(1-b)x^{-b-1} y_1(x). \end{aligned} \quad (6.257)$$

Al sustituir estas derivadas en la ecuación de Kummer, nos queda

$$\begin{aligned} &x(x^{1-b} y_1''(x) + 2(1-b)x^{-b} y_1'(x) - b(1-b)x^{-b-1} y_1(x)) \\ &+ (b-x)(x^{1-b} y_1'(x) + (1-b)x^{-b} y_1(x)) - ax^{1-b} y_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (6.258)$$

y al agrupar términos semejantes y simplificar un poco, nos queda

$$\begin{aligned} &x^{1-b} x y_1''(x) + [2(1-b) + (b-x)] x^{1-b} y_1'(x) - b(1-b)x^{-b} y_1(x) \\ &+ b(1-b)x^{-b} y_1(x) - (1-b+a)x^{1-b} y_1(x) = 0, \end{aligned} \quad (6.259)$$

o bien, cancelando los términos $b(1-b)x^{-b}y_1(x)$ y dividiendo toda la expresión entre x^{1-b} , nos queda que

$$xy_1''(x) + [2 - b - x] y_1'(x) - (1 - b + a)y_1(x) = 0. \quad (6.260)$$

Si definimos $\tilde{b} = 2 - b$ y $\tilde{a} = a - b + 1$ tenemos que esta última ecuación luce como:

$$xy_1''(x) + [\tilde{b} - x] y_1'(x) - \tilde{a}y_1(x) = 0, \quad (6.261)$$

que resulta ser la ecuación de Kummer con parámetros $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ en lugar de a y b . Pero esto significa, entonces, que la función y_1 satisface la ecuación de Kummer y, por lo tanto, la solución es

$$y_1(x) = M(\tilde{a}, \tilde{b}, x) = M(a - b + 1, 2 - b, x). \quad (6.262)$$

Con esto hemos mostrado que, en efecto, la función $y_2(x) = x^{1-b}M(a - b + 1, 2 - b, x)$ es la segunda solución (linealmente independiente de $M(a, c, x)$) de la ecuación hipergeométrica confluyente dada en la expresión (6.255). Obsérvese que $y_2(x)$ es solución de la ecuación de Kummer siempre que b no sea un entero mayor a 1, ya que si esto ocurre (por ejemplo, hagamos $b = 1 + m$ con $m > 0$), el factor $(2 - b)_n = (1 - m)_n$ es cero (si $m = 1$) o un entero negativo (si $m > 1$), lo que significa que el denominador de al menos un coeficiente en la serie hipergeométrica confluyente,

$$M(a - m, 1 - m, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a - m)_n x^n}{(1 - m)_n n!}, \quad (6.263)$$

es nulo y, por lo tanto, $M(a - m, 1 - m, x)$ queda indeterminada.

Si bien la función $y_2(x) = x^{1-b}M(a - b + 1, 2 - b, x)$ puede ser buena elección para la segunda solución de la ecuación de Kummer, se prefiere el uso de la función de Tricomi, denominada así en honor a Francesco Tricomi quien la definió en 1947 [63]. La función de Tricomi se denota por $U(a, b, z)$ y se define como una combinación lineal de estas soluciones que hemos desarrollado hasta aquí. Específicamente la función de Tricomi, también llamada función hipergeométrica confluyente de segundo tipo, se define como:

$$U(a, b, z) := \frac{\Gamma(1 - b)}{\Gamma(a + 1 - b)} M(a, b, z) + \frac{\Gamma(b - 1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} M(a + 1 - b, 2 - b, z). \quad (6.264)$$

Aunque esta expresión no está definida para b entero (debido a los factores $\Gamma(1 - b)$ y $\Gamma(b - 2)$ que provocan la indeterminación cuando $b \in \mathbb{Z}$), la función $U(a, b, x)$ tiene la ventaja de que puede extenderse a cualquier entero b por continuidad. A diferencia de la función de Kummer, que es una función entera de z como función de variable compleja,

la función $U(a, b, z)$ suele tener una singularidad en cero. Por ejemplo, si $b = 0$ y $a \neq 0$, entonces, $\Gamma(a+1)U(a, b, z) - 1$ es asintótica a $az \ln(z)$ cuando z tiende a cero [42]. Al igual que la función de Kummer, la función de Tricomi tiene una representación integral dada por [46]:

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt. \quad (6.265)$$

Esta representación fue originalmente obtenida por Tricomi en su trabajo de 1947 [63] (cf. también referencia [64]) haciendo uso de la transformada de Laplace. De hecho, es posible darse cuenta de que la representación integral de $U(a, b, z)$ es esencialmente la transformada de Laplace de una función algebraica, la función $t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}$.

Es importante mencionar que esta segunda solución a la ecuación de Kummer está definida de manera unívoca [14, 42] a través de una propiedad asintótica que establece que

$$U(a, b, z) \sim z^{-a}, \quad \text{con } z \rightarrow \infty, \quad \text{y } |\arg(z)| < \pi. \quad (6.266)$$

Además de esto, y al igual que para la función de Kummer, la función de Tricomi satisface una relación funcional, dada por

$$U(a, b, z) = z^{1-b} U(1+a-b, 2-b, z) \quad (6.267)$$

que, junto con la identidad

$$M(a, b, z) = e^z M(b-a, b, -z) \quad (6.268)$$

para la función de Kummer, son conocidas como las *transformaciones de Kummer*. Esta última identidad se puede encontrar ya en el trabajo original de Kummer de 1837 [35], mientras que la identidad entre funciones de Tricomi se puede encontrar en su trabajo de 1960 [64].

Al igual que la función de Kummer, con la función de Tricomi se puede representar una amplia variedad de funciones elementales y especiales. Damos, a continuación, algunos ejemplos.

i. Una identidad sencilla se obtiene cuando se evalúa la función en $(a, a+1, z)$:

$$U(a, a+1, z) = z^{-a}. \quad (6.269)$$

ii. Cuando se evalúa la función de Tricomi, obtenemos una integral indefinida que involucra exponenciales:

$$U(a, a, z) = e^z \int_z^\infty u^{-a} e^{-u} du. \quad (6.270)$$

iii. Función de Bessel modificada de segundo tipo:

$$U(a, 2a, x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{\pi}} x^{1/2-a} K_{a-1/2}(x/2). \quad (6.271)$$

iv. Exponencial integral:

$$U(1, 1, x) = e^x E_1(x), \quad (6.272)$$

donde $E_1(x)$ es la exponencial integral definida como:

$$E_1(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (6.273)$$

6.3. Ejercicios

1. Sea $\psi_n(x)$ una función definida en términos de los polinomios de Hermite como

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{c_n^2}}, \quad \text{con} \quad c_n^2 = \pi^{1/2} 2^n n!.$$

Muestra que ψ satisface la ecuación diferencial

$$\psi_n'' + (2n + 1 - x^2)\psi_n(x) = 0.$$

2. Si definimos la función $\psi_n(x)$ como en el problema 1, muestra que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\psi_n &= n^{1/2}\psi_{n-1}, \\ \mathbf{a}^\dagger\psi_n &= (n+1)^{1/2}\psi_{n+1}, \end{aligned} \quad (6.274)$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}^\dagger$ son dos operadores definidos como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right), \\ \mathbf{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right). \end{aligned} \quad (6.275)$$

3. A partir de la función generatriz de los polinomios de Laguerre, muestra que

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x) &= (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \\ xL_n'(x) &= nL_n(x) - nL_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (6.276)$$

4. A partir de la función generatriz de los polinomios de Hermite, muestra que

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n!)}{n!}, \quad \text{y} \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

5. A partir de la representación integral de los polinomios de Laguerre $L_n(x)$, muestra que la fórmula de Rodrigues para los polinomios asociados de Laguerre, $L_n^k(x)$, se escribe como

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+k} e^{-x} \right).$$

Recuerda que los polinomios asociados de Laguerre se definen como

$$L_n^k(x) := (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(L_{n+k} \right).$$

Sugerencia: deriva k veces la representación integral de L_{n+k} , luego usa el cambio de variable $z = (s-x)/s$ e identifica la función dentro de la fórmula integral de Cauchy.

6. Usando el método de Frobenius, muestra que la solución de la ecuación hipergeométrica confluyente,

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0, \quad (6.277)$$

tiene una solución dada por el desarrollo

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Sugerencia: asume que la solución de la ecuación (6.277) es regular, i.e., asume que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

y halla los coeficientes del desarrollo.

7. Muestra que la función error $\operatorname{erf}(x)$:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

se puede escribir en términos de la función hipergeométrica confluyente como

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right).$$

Sugerencia: primero, encuentra un desarrollo en serie para $\operatorname{erf}(x)$ desarrollando la función e^{-x^2} dentro de la integral. Luego, integra. Por separado, escribe el desarrollo en serie de $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right)$, reduce y compara.

8. Los polinomios de Chebyshev, denotados por $U_n(x)$, se pueden definir por medio de la función generatriz

$$G_U(x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n.$$

Muestra que una expresión en serie de potencias para los polinomios de Chebyshev es de la forma

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Sugerencia: haz $\xi = 2xt - t^2$ y desarrolla $(1 - \xi)^{-1}$ como una serie de potencias. Luego, desarrolla $(2xt - t^2)^n$ usando el teorema binomial y, entonces, usa la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{k,n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{m,n-2m}. \quad (6.278)$$

9. Demuestra las siguientes identidades:

i. Polinomios de Legendre $P_n(x)$ y las funciones asociadas de Legendre $P_n^m(x)$:

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{1}\right), \quad (6.279)$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!} {}_2F_1\left(m-n, m+n+1, m+1; \frac{1-x}{1}\right). \quad (6.280)$$

ii. La función beta incompleta, que se define como

$$B_x(p, q) := \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (6.281)$$

puede escribirse como

$$B_x(p, q) = \frac{x^p}{p} {}_2F_1(p, 1-q; p+1; x). \quad (6.282)$$

iii. Funciones de Chebyshev $T_n(x)$, $U_n(x)$ y $V_n(x)$ definidos como

$$T_n(\cos(\phi)) = \cos(n\phi), \quad (6.283)$$

$$U_n(\cos(\phi)) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)}, \quad (6.284)$$

$$V_n(\cos(\phi)) = \sin(n\phi), \quad (6.285)$$

tienen las siguientes representaciones en términos de la función hipergeométrica:

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (6.286)$$

$$U_n(x) = (n+1) {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (6.287)$$

$$V_n(x) = n\sqrt{1-x^2} {}_2F_1\left(-n+1, n+1; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right). \quad (6.288)$$

iv. Los polinomios ultrasféricos $C_n^{(\alpha)}(x)$ (emparentados con los polinomios de Legendre), también llamados polinomios de Gegenbauer, se definen mediante la función generatriz:

$$G(x, t; \alpha) = \frac{1}{(1-2xt+t^2)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\alpha)}(x) t^k. \quad (6.289)$$

Lo polinomios ultrasféricos tienen la representación en términos de la función hipergeométrica:

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n+2\alpha}{2^\alpha n! \Gamma(\alpha+1)} {}_2F_1\left(-n, n+2\alpha+1; 1+\alpha; \frac{1-x}{2}\right). \quad (6.290)$$

v. Las integrales elípticas $K(k)$ y $E(k)$ que se definen como:

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta, \quad (6.291)$$

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)} d\theta, \quad (6.292)$$

tienen la siguiente representación:

$$K(k) := \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (6.293)$$

$$E(k) := \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (6.294)$$

10. Muestra que

$${}_2F_1\left(a, -a; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4(x-1)}\right) = \frac{(1-x)^a + (1-x)^{-a}}{2}. \quad (6.295)$$

11. Muestra que la función de Kummer se puede obtener mediante el límite:

$$M(a, c, z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right). \quad (6.296)$$

12. Verifica la primera fórmula de transformación de Kummer:

$$M(a, c, x) = e^x M(c-a, c, -x). \quad (6.297)$$

13. Verifica las representaciones integrales de las funciones de Kummer y de Tricomi:

$$\begin{aligned} M(a, c, z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \\ U(a, c, z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \end{aligned}$$

14. Usando la representación integral de $M(a, c, x)$, verifica la primera identidad de Kummer:

$$M(a, c, x) = e^x M(c - a, c, -x).$$

Sugerencia: reemplaza la variable de integración t por $1 - s$ para liberarse del factor exponencial e^x de la integral.

15. Verifica las siguientes identidades relacionadas con la función de Kummer.

i. La función exponencial:

$$e^z = M(b, b, z). \quad (6.298)$$

ii. La función error: esta se define como una integral indefinida de la función gaussiana, es decir,

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (6.299)$$

Esta función se puede expresar en términos de $M(a, b, z)$ como:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) \quad (6.300)$$

iii. Las funciones de Bessel:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right), \quad (6.301)$$

$$I_\nu(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2x\right). \quad (6.302)$$

iv. Las funciones de Hermite:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (6.303)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right). \quad (6.304)$$

v. Las funciones de Laguerre y las funciones asociadas:

$$L_n(x) = M(-n, 1, x), \quad (6.305)$$

$$L_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} M(-n, m+1, x). \quad (6.306)$$

vi. La función gamma incompleta inferior se define como:

$$\gamma(a, x) := \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, \quad (6.307)$$

y en términos de la función de Kummer se puede representar como:

$$\gamma(z, s) = s^z M(z, z+1, -s), \quad (6.308)$$

$$\gamma(z, s) = z^{-1} s^z e^{-s} M(1, z+1, s). \quad (6.309)$$

16. Muestra la validez de las siguientes fórmulas de derivación:

$$\frac{d^n}{dx^n} M(a, c, x) = \frac{(a)_n}{(c)_n} M(a+n, c+n, x), \quad (6.310)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} U(a, c, x) = (-1)^n (a)_n U(a+n, c+n, x). \quad (6.311)$$

17. Muestra la segunda fórmula de transformación de Kummer:

$$U(a, b, z) = z^{1-b} U(1+a-b, 2-b, z). \quad (6.312)$$

18. Verifica las siguientes identidades que involucran a la función de Tricomi.

i. Potencia de z :

$$U(a, a+1, z) = z^{-a}. \quad (6.313)$$

ii. Integrales de exponenciales:

$$U(a, a, z) = e^z \int_z^\infty u^{-a} e^{-u} du. \quad (6.314)$$

iii. Función de Bessel modificada de segundo tipo:

$$U(a, 2a, x) = \frac{e^{x/2}}{\sqrt{\pi}} x^{1/2-a} K_{a-1/2}(x/2). \quad (6.315)$$

iv. Exponencial integral:

$$U(1, 1, x) = e^x E_1(x), \quad (6.316)$$

donde $E_1(x)$ es la exponencial integral definida como:

$$E_1(x) := \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (6.317)$$

Parte II

Métodos integrales

Capítulo 7

Ecuaciones integrales

En este capítulo vamos a estudiar las ecuaciones integrales, un tipo de ecuaciones en las que la función desconocida se encuentra dentro del signo de integral. Vamos a mostrar que una ecuación diferencial de segundo orden puede escribirse como una ecuación integral. Una ventaja de realizar esta conversión tiene que ver con el hecho de que la ecuación integral correspondiente a una ecuación diferencial ya contiene en sí misma las condiciones iniciales o las condiciones de borde. Más allá de la elegancia de la teoría de ecuaciones integrales, desde el punto de vista de la física, existen muchos problemas en los que surgen naturalmente ecuaciones integrales para la descripción del fenómeno correspondiente.

7.1. Tipos de ecuaciones integrales

Vamos a distinguir dos grandes familias de ecuaciones integrales llamadas *ecuaciones de Fredholm* y *ecuaciones de Volterra*. Las ecuaciones de Fredholm son aquellas en las que los límites de integración se encuentran fijos, mientras que las de Volterra se caracterizan por tener un límite de integración variable. Cada una de estas familias se divide en dos grupos, llamados de primer tipo y de segundo tipo, que se refiere al hecho de si la función desconocida se encuentra únicamente dentro del signo de integral (primer tipo) o si también aparece fuera de este (segundo tipo).

- i. Ecuación de Fredholm de primer tipo.

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy \quad (7.1)$$

ii. Ecuación de Fredholm de segundo tipo.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\phi(y)dy \quad (7.2)$$

iii. Ecuación de Volterra de primer tipo.

$$f(x) = \int_a^x K(x, y)\phi(y)dy \quad (7.3)$$

iv. Ecuación de Volterra de segundo tipo.

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\phi(y)dy \quad (7.4)$$

En todos los casos arriba expuestos, la función desconocida se representa por $\phi(x)$, mientras que funciones $f(x)$ y $K(x, t)$ son funciones dadas. La función $K(x, y)$ es llamada *núcleo*. En el caso particular en que la función $f(x)$ es cero, $f(x) = 0$ para todo x , a la ecuación integral se le llama *homogénea*; en caso contrario, se denomina *no homogénea*.

7.2. Ecuaciones diferenciales como ecuaciones integrales

Vamos ahora a transformar el problema de valor inicial de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden a una ecuación integral. Consideremos la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{d^2u}{dx^2} + A(x)\frac{du}{dx} + B(x)u(x) = g(x), \quad (7.5)$$

donde $g(x)$ es una función dada. Consideremos las condiciones iniciales

$$u(a) = u_0, \quad u'(a) = u'_0$$

para $a \in \mathbb{R}$.

Si ahora integramos cada término de la ecuación (7.5), desde a hasta un punto x , arbitrario tendríamos la igualdad

$$\int_a^x \frac{d^2u}{dy^2} dy = u'(x) - u'(a) = \int_a^x g(y)dy - \int_a^x A(y)u'(y)dy - \int_a^x B(y)u(y)dy. \quad (7.6)$$

Notemos que si integramos por partes la primera integral en el miembro derecho de la ecuación, obtenemos

$$\int_a^x A(y)u'(y)dy = A(y)u(y)\Big|_a^x - \int_a^x A'(y)u(y)dy = A(x)u(x) - A(a)u(a) - \int_a^x A'(y)u(y)dy.$$

De esta manera podemos ver que la ecuación diferencial considerada toma la forma

$$u'(x) = \int_a^x g(y)dy + u'_0 + A(a)u_0 - A(x)u(x) + \int_a^x A'(y)u(y)dy - \int_a^x B(y)u(y)dy. \quad (7.7)$$

Integrando nuevamente de a hasta x obtenemos

$$\begin{aligned} u(x) - u_0 &= \int_a^x \left(\int_a^{x'} g(y)dy \right) dx' + [u'_0 + A(a)u_0](x - a) - \int_a^x A(y)u(y)dy \\ &+ \int_a^x \left(\int_a^{x'} A'(y)u(y)dy \right) dx' - \int_a^x \left(\int_a^{x'} B(y)u(y)dy \right) dx'. \end{aligned} \quad (7.8)$$

No es difícil observar que la doble integración que aparece en la igualdad anterior puede escribirse como una integral simple haciendo uso de la siguiente identidad:

$$\int_a^x \left(\int_a^{x'} g(y)dy \right) dx' = \int_a^x (x - y)g(y)dy. \quad (7.9)$$

Mediante esta identidad podemos observar que la ecuación (7.8) se transforma en

$$u(x) = \int_a^x g(y)dy + u_0 + [u'_0 + A(a)u_0](x - a) + \int_a^x [-A(y) + (x - y)(A'(y) - B(y))]u(y)dy. \quad (7.10)$$

Tenemos, entonces, que la ecuación diferencial (7.5) considerada inicialmente es equivalente a la ecuación de Volterra de segundo tipo (7.10), cuya forma abreviada se escribe como

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)u(y)dy, \quad (7.11)$$

donde la función $f(x)$ se define como

$$f(x) := \int_a^x g(y)dy + u_0 + [u'_0 + A(a)u_0](x - a), \quad (7.12)$$

y el núcleo de dicha ecuación integral está dado por

$$K(x, y) := -A(y) + (x - y)(A'(y) - B(y)). \quad (7.13)$$

7.3. Método de la serie Neumann

Una de las técnicas más generales para resolver ecuaciones integrales, que fue desarrollada por Neumann, Liouville y Volterra principalmente, consiste en suponer que la solución de una ecuación integral puede escribirse como una serie de funciones que se obtiene de manera iterada partiendo de una condición de inicio.

Para ilustrar el método de solución propuesto, consideremos una ecuación de Fredholm de segundo tipo,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\phi(t)dt. \quad (7.14)$$

Si quisiéramos una aproximación sencilla a esta ecuación, podríamos decir que, $\phi(x)$ es aproximadamente $f(x)$. Esto es debido a que, en la igualdad (7.14), podemos ignorar la integral, en donde aparece la función ϕ desconocida. Esto se puede justificar si pensamos que dicha integral toma un valor pequeño, casi cero, y de esta forma, decir que nuestra primera aproximación a la solución $\phi(x)$ es la función $\phi_0(x)$ definida como

$$\phi_0(x) = f(x). \quad (7.15)$$

Si quisiéramos una mejor aproximación podríamos usar esta primera para mejorarla. Introduciendo ϕ_0 en el miembro derecho de la ecuación (7.14), tenemos que

$$\phi_1(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\phi_0(t)dt = f(x) + \int_a^b K(x, t)f(t)dt \quad (7.16)$$

es una mejor aproximación a la solución $\phi(x)$. Sustituyendo ahora ϕ_1 el miembro derecho de la ecuación (7.14), no es difícil ver que una nueva aproximación sería de la forma

$$\phi_2(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)f(t_2)dt_1dt_2, \quad (7.17)$$

esto es, $\phi(x) \approx \phi_2(x)$.

Si continuamos este procedimiento recursivamente, sustituyendo dentro de la integral la más reciente aproximación en la integral para obtener una nueva aproximación, podemos observar que, después de n iteraciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \phi_n(x) = & f(x) + \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \int_a^b \int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)f(t_2)dt_1dt_2 + \cdots \\ & + \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t_n)f(t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \end{aligned} \quad (7.18)$$

Si tomamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$, podríamos asegurar que la serie infinita que se obtiene es la solución exacta, siempre y cuando la serie sea convergente. Esto es, la solución $\phi(x)$ podría expresarse como

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (7.19)$$

donde las funciones $u_n(x)$ se definen como

$$u(x) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_{n-1}, t_n) f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n, \quad \text{para } n \geq 1 \quad (7.20)$$

siendo $u_0(x) = f(x)$.

Una manera alternativa y a la vez práctica para obtener este desarrollo en serie es haciendo uso de la notación abstracta de Dirac. La integral

$$\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

es, en realidad, un operador lineal aplicado a la función ϕ . Si denotamos esta operación por $\mathbf{K}$ y a la función $\phi(x)$ como vector ket $|\phi\rangle$ así como a la función f como el vector $|f\rangle$, entonces, la ecuación integral (7.14) puede escribirse de la siguiente manera:

$$|\phi\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}|\phi\rangle. \quad (7.21)$$

Nuestra primera aproximación claramente podría expresarse como:

$$|\phi_0\rangle := |f\rangle.$$

La siguiente aproximación sería

$$|\phi_1\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}|f\rangle,$$

lo que se obtiene simplemente sustituyendo $|\phi\rangle$ por $|f\rangle$ en el lado derecho de la ecuación (7.21). No es difícil darse cuenta de que la siguiente aproximación sería, entonces,

$$|\phi_2\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}|\phi_1\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}(|f\rangle + \mathbf{K}|f\rangle) = |f\rangle + \mathbf{K}|f\rangle + \mathbf{K}\mathbf{K}|f\rangle$$

o bien,

$$|\phi_2\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}|f\rangle + \mathbf{K}^2|f\rangle,$$

en donde hemos representado por $\mathbf{K}^2$ la operación que consiste en aplicar dos veces el operador integral $\mathbf{K}$. Siguiendo con este procedimiento recursivamente tendríamos que, al iterar n veces, obtendríamos la n -ésima aproximación como

$$|\phi_n\rangle = |f\rangle + \mathbf{K}|f\rangle + \mathbf{K}^2|f\rangle + \cdots + \mathbf{K}^n|f\rangle. \quad (7.22)$$

Esta última expresión es una serie que se puede reescribir

$$|\phi_n\rangle = \sum_{k=0}^n \mathbf{K}^k |f\rangle, \quad (7.23)$$

donde el operador $\mathbf{K}^0$ se define como el operador identidad, esto es $\mathbf{K}^0 := \mathbf{I}$.

Si la serie converge, entonces, la solución formal a este problema se podría escribir como la serie infinita

$$|\phi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{K}^k |f\rangle. \quad (7.24)$$

Para hallar las funciones $|u_n\rangle := \mathbf{K}^n |f\rangle$ todo lo que hay que hacer es notar que $|u_n\rangle = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1} |f\rangle) = \mathbf{K}|u_{n-1}\rangle$. Esto es, podemos usar la relación de recurrencia

$$|u_n\rangle = \mathbf{K}|u_{n-1}\rangle \quad (7.25)$$

con la condición inicial $|u_0\rangle = |f\rangle$ para hallar todos los términos de la serie.

La ecuación $|u_n\rangle = \mathbf{K}|u_{n-1}\rangle$ puede escribirse en su forma integral como

$$u_n(x) = \int_a^b K(x, t) u_{n-1}(t) dt, \quad (7.26)$$

con la condición inicial $u_0(x) = f(x)$, lo que nos ofrece una forma recursiva para hallar las funciones $u_n(x)$ y con estas construir la solución a la ecuación integral.

Ejemplo 7.3.1. Consideremos la ecuación integral

$$\phi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x) \phi(t) dt. \quad (7.27)$$

Para resolver esta ecuación integral tenemos que calcular las funciones $u(x)$, pues la solución se puede escribir como

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

De acuerdo con la ecuación (7.25), estas funciones $u(x)$ deben satisfacer la relación de recurrencia

$$u_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t - x) u_{n-1}(t) dt, \quad (7.28)$$

con la condición inicial $u_0(x) = x$.

Calculemos $u_n(x)$ para los primeros valores de n . De acuerdo con la relación de recurrencia tenemos que

$$u_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)t dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t^2 - xt) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - \frac{xt^2}{2} \right) \Big|_{t=-1}^{t=1}, \quad (7.29)$$

de modo que

$$u_1(x) = \frac{1}{3}. \quad (7.30)$$

Notemos que estas dos primeras funciones son lineales, $u_0(x) = x$ y $u_1(x) = \frac{1}{3}$, de modo que resulta razonable preguntarse qué sucede si aplicamos el operador integral a una función lineal arbitraria. Si tomamos la función $u(x) := ax + b$ con a y b constantes, entonces, tenemos que la función $v(x)$, que resulta de aplicar la operación integral (7.28) a $u(x)$, nos da

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)u(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)(at+b) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (at^2 + bt - xt - bx) dt, \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{at^3}{3} + \frac{(b-x)t^2}{2} - bxt \right) \Big|_{t=-1}^{t=1}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde es posible ver que

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)(at+b) dt = \left(-bx + \frac{1}{3}a \right). \quad (7.32)$$

Observamos que, para obtener $u_2(x)$, hay que realizar la operación anterior para $u_1(x) = \frac{1}{3}$, de modo que podemos usar la fórmula (7.32) con $a = 0$ y $b = \frac{1}{3}$, lo que resulta en

$$u_2 = -\frac{1}{3}x.$$

Si queremos obtener $u_3, u_4, \dots$, y en general todas las u_n , podemos hacer uso de la fórmula (7.32) para calcular las integrales directamente. A continuación, calculamos algunas u_n

para valores de n superiores,

$$\begin{aligned} u_3(x) &= -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right), \\ u_4(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)x, \\ u_5(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right), \\ u_6(x) &= -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)x, \\ u_7(x) &= -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

No es difícil convencerse de que, en general, tendremos las siguientes expresiones para u_{2n} ,

$$u_{2n}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n x \quad (7.33)$$

para $n \geq 1$. Para u_{2n+1} tenemos algo similar,

$$u_{2n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \quad (7.34)$$

para $n \geq 0$.

Con todo esto es claro, que podemos escribir la solución $\phi(x)$ para la ecuación integral (7.27) como el siguiente desarrollo en serie,

$$\phi(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n x + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \quad (7.35)$$

Es claro que los desarrollos anteriores resultan ser series geométricas, por lo cual tenemos que

$$\phi(x) = x - \frac{1}{3} \frac{x}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = x - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3x}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right), \quad (7.36)$$

esto es, la solución es la función lineal

$$\phi(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, \quad (7.37)$$

Ejemplo 7.3.2. Para ilustrar la generalidad del método de la serie de Neumann, consideremos ahora la ecuación integral de Volterra de segundo tipo,

$$\phi(x) = x + \int_0^x (t-x)\phi(t)dt. \quad (7.38)$$

Como en el ejemplo anterior, haremos uso de la relación de recurrencia para las funciones u_n , que en este caso específico puede escribirse como

$$u_n(x) = \int_0^x (t-x)u_{n-1}(t)dt, \quad (7.39)$$

con la condición de inicio $u_0(x) = x$.

Vamos a obtener los primeros u_n usando la recurrencia (7.39),

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_0^x (t-x)u_0(t)dt = \int_0^x (t-x)t dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x^3, \\ u_2(x) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \int_0^x (t-x)t^3 dt = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{4}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) x^5, \\ u_3(x) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \int_0^x (t-x)t^5 dt = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{6}\right) x^7 \end{aligned}$$

De lo anterior, podemos inferir que la función $u_n(x)$ tendrá la forma

$$u_n(x) = c_n x^{2n+1}, \quad (7.40)$$

donde el coeficiente c_n se puede escribir como

$$c_n = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \right) = \prod_{j=1}^n \frac{2n - (2n+1)}{(2n+1)(2n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}. \quad (7.41)$$

Con todo esto, podemos ver que la solución a la ecuación integral toma la forma

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (7.42)$$

en la que reconocemos la serie como el desarrollo en serie de potencias de la función $\sin(x)$ alrededor de $x = 0$, esto es,

$$\phi(x) = \sin(x),$$

es la función que resuelve la ecuación original (7.38).

7.4. Método del núcleo separable

Un método alternativo para obtener las soluciones de una ecuación integral se puede desarrollar haciendo una hipótesis sobre las características del núcleo. Consideremos una

ecuación integral de Fredholm de segundo tipo,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)\phi(t)dt, \quad (7.43)$$

y supongamos que su núcleo puede escribirse como

$$K(x, t) = \sum_{k=0}^n N_k(x)M_k(t). \quad (7.44)$$

Si el núcleo de una ecuación integral puede escribirse de la forma (7.44), diremos que es un *núcleo separable*. Bajo esta hipótesis, vemos que la ecuación integral puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) + \int_a^b \sum_{k=0}^n N_k(x)M_k(t)\phi(t)dt, \\ &= f(x) + \sum_{k=0}^n N_k(x) \left(\int_a^b M_k(t)\phi(t)dt \right). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Notemos que lo que se encuentra dentro de los paréntesis no depende de la variable x , por lo que podemos representar esa operación como un coeficiente c_k ,

$$c_k = \int_a^b M_k(t)\phi(t)dt, \quad (7.46)$$

con lo cual tenemos que la ecuación integral se transforma en

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{k=0}^n c_k N_k(x), \quad (7.47)$$

es decir, si conociéramos los coeficientes c_k podríamos afirmar que ϕ , la solución a la ecuación integral, es una combinación lineal de las funciones $N_k(x)$. Podemos apreciar que los coeficientes c_k se definen en términos de ϕ , por lo que no es posible calcularlos en este momento. No obstante, si tomamos la expresión para ϕ como combinación lineal de las funciones $N_k(x)$ dada en la expresión (7.47) y la sustituimos en la definición de los coeficientes c_k , dada en (7.46), tendríamos lo siguiente

$$\begin{aligned} c_m &= \int_a^b M_m(t) \left[f(t) + \sum_{k=0}^n c_k N_k(t) \right] dt, \\ &= \int_a^b M_m(t)f(t)dt + \sum_{k=0}^n c_k \int_a^b M_m(t)N_k(t)dt. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Notemos que las integrales que aparecen en la igualdad anterior ya no dependen de ninguna variable independiente (ni de x ni de t), solo de los índices de las funciones involucradas en el núcleo. Si adoptamos la siguiente notación para estas integrales,

$$\begin{aligned} f_m &= \int_a^b M_m(t) f(t) dt \\ A_{m,k} &= \int_a^b M_m(t) N_k(t) dt. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Con estas definiciones, podemos ver que el coeficiente c_m puede escribirse como

$$c_m = f_m + \sum_{k=0}^n A_{m,k} c_k, \quad (7.50)$$

que es una ecuación lineal, cuya representación matricial puede escribirse

$$\mathbf{c} = \mathbf{f} + \mathbf{A}\mathbf{c} \quad (7.51)$$

donde los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{f}$ así como la matriz $\mathbf{A}$, se definen como

$$\mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} := \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

Claramente, el vector $\mathbf{c}$ contiene los coeficientes desconocidos en términos de los cuales podemos escribir la solución a la ecuación integral. Para hallarlos, todo lo que hay que hacer es despejar $\mathbf{c}$ de la ecuación (7.51). Observamos que el vector $\mathbf{c}$ puede escribirse como

$$\mathbf{c} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f}, \quad (7.53)$$

esto es, solo tenemos que invertir una matriz de $n \times n$ y aplicarla sobre el vector $\mathbf{f}$. Una vez hecho esto, la solución a la ecuación integral (7.43) queda dada por

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{k=0}^n c_k N_k(x), \quad (7.54)$$

Si ahora consideramos la ecuación de Fredholm de segundo tipo como un problema de valores propios, es decir, consideramos el problema homogéneo

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt, \quad (7.55)$$

donde buscamos los valores de λ y ϕ que satisfacen dicha ecuación.

No es difícil adaptar los cálculos que hemos hecho para este caso. Si definimos los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{f}$, así como la matriz $\mathbf{A}$, al igual que en el caso anterior, podemos ver que en este caso el vector $\mathbf{f}$ es cero ya que $f(x) = 0$. Entonces, la ecuación para los c_m puede escribirse como

$$c_m = \lambda \sum_{k=0}^n A_{m,k} c_k, \quad (7.56)$$

la cual, al resolverla, nos da la posibilidad de escribir la solución a la ec. (7.55) como

$$\phi(x) = \lambda \sum_{k=0}^n c_k N_k(x). \quad (7.57)$$

Es claro que la ecuación (7.56) es un problema de vectores y valores propios, esto es, buscamos los valores de λ y los vectores $\mathbf{c}$ que satisfagan la ecuación

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{A} \mathbf{c}, \quad (7.58)$$

donde los elementos matriciales de $\mathbf{A}$ se obtienen a partir del núcleo separable

$$K(x, t) = \sum_{k=0}^n N_k(x) M_k(t) dt, \quad (7.59)$$

como las integrales,

$$A_{m,k} = \int_a^b M_m(t) N_k(t) dt. \quad (7.60)$$

Ejemplo 7.4.1. Como ejemplo de esta metodología consideremos la ecuación integral de valores propios

$$\phi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (t-x)^2 \phi(t) dt. \quad (7.61)$$

El núcleo de esta ecuación diferencial es separable, pues al desarrollar el binomio cuadrado podemos ver que

$$K(x, t) = (t-x)^2 = t^2 - 2xt + x^2, \quad (7.62)$$

lo que claramente está en la forma separable de acuerdo con la igualdad (7.44). Para determinar las funciones N_k y M_k , podemos hacer las asignaciones siguientes: $N_1(x)M_1(t) = t^2$, $N_2(x)M_2(t) = -2xt$, $N_3(x)M_3(t) = x^2$. De estas igualdades podemos ver que

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1, & N_2(x) &= -2x, & N_3(x) &= x^2, \\ M_1(t) &= t^2, & M_2(t) &= t, & M_3(t) &= 1. \end{aligned}$$

Una vez que se tienen bien definidas las funciones N_k y M_k , podemos calcular los elementos matriciales $A_{m,k}$. Usando la expresión (7.60), podemos ver que

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \int_{-1}^1 (t^2)(1)dt = \frac{2}{3}, & A_{1,2} &= \int_{-1}^1 (t^2)(-2t)dt = 0, & A_{1,3} &= \int_{-1}^1 (t^2)(t^2)dt = \frac{2}{5}, \\ A_{2,1} &= \int_{-1}^1 (t)(1)dt = 0, & A_{2,2} &= \int_{-1}^1 (t)(-2t)dt = -\frac{4}{3}, & A_{2,3} &= \int_{-1}^1 (t)(t^2)dt = 0, \\ A_{3,1} &= \int_{-1}^1 (1)(1)dt = 2, & A_{3,2} &= \int_{-1}^1 (1)(-2t)dt = 0, & A_{3,3} &= \int_{-1}^1 (1)(t^2)dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Con todo esto, notamos que la matriz $\mathbf{A}$ toma la forma

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \quad (7.63)$$

Entonces, para hallar todas las funciones propias y los valores propios de la ecuación integral (7.61), hay que determinar los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$.

El polinomio característico de $\mathbf{A}$ puede escribirse como

$$\det(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) := \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \mu & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{4}{3} - \mu & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3} - \mu\right)^2 \left(-\frac{4}{3} - \mu\right) + 2 \left(\frac{2}{5}\right) \left(-\frac{4}{3} - \mu\right) = 0. \quad (7.64)$$

Es decir, la ecuación característica que hay que resolver para obtener los valores propios es

$$\left(-\frac{4}{3} - \mu\right) \left[\left(\frac{2}{3} - \mu\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right) \right] = 0. \quad (7.65)$$

De la expresión anterior, es posible ver que uno de los valores propios es $-4/3$, mientras que los otros dos se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática resultante. Un cálculo directo nos muestra que los valores propios están dados por

$$\mu_1 = -\frac{4}{3}, \quad \mu_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \mu_3 = \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}. \quad (7.66)$$

Después de algunos cálculos algebraicos, es posible ver que los vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ pueden escribirse como sigue

$$\mathbf{a}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.67)$$

En lo anterior hemos denotado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ los vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$, esto es, los vectores $\mathbf{c}$ que son solución de la ecuación

$$\mu \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c}.$$

Como nuestra ecuación de valores propios que se obtiene de la ecuación integral se escribe en la forma

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{A} \mathbf{c},$$

es claro que el papel de λ es $1/\mu$, con lo cual tenemos que los valores propios de la ecuación integral son

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-1}, \quad \lambda_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-1}, \quad (7.68)$$

con las funciones propias asociadas

$$\phi_1(x) = \lambda_1 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_1)_j N_j(x), \quad \phi_2(x) = \lambda_2 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_2)_j N_j(x), \quad \phi_3(x) = \lambda_3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_3)_j N_j(x). \quad (7.69)$$

Si recordamos que las funciones N_j están definidas como $N_1(x) = 1$, $N_2(x) = -2x$ y $N_3(x) = x^2$, podemos escribir explícitamente las funciones propias como

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= -\frac{3}{4}(-2x) = \frac{3x}{2}, \\ \phi_2(x) &= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + x^2 \right), \\ \phi_3(x) &= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + x^2 \right), \end{aligned}$$

lo que resuelve el problema de valores propios y funciones propias de la ecuación integral (7.61).

7.5. La teoría de Hilbert-Schmidt

La teoría de Hilbert-Schmidt trata de ecuaciones integrales lineales del tipo Fredholm con núcleos simétricos, es decir, con núcleos $K(x, t)$ que satisfacen la propiedad:

$$K(x, t) = K(t, x). \quad (7.70)$$

La simetría, en este caso, es de gran importancia, tanto porque conduce a resultados paralelos a los que hemos establecido para la teoría de ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville, como porque muchos problemas de relevancia física pueden escribirse como ecuaciones integrales de Fredholm con núcleos simétricos. Antes de sumergirnos en la teoría, debemos observar que esta propiedad de simetría no es limitante, ya que algunos núcleos no simétricos importantes pueden volverse simétricos. Específicamente, si tenemos la ecuación

$$\phi(x) = \tilde{f}(x) + \lambda \int_a^b \tilde{K}(x, t) \rho(t) \phi(t) dt, \quad (7.71)$$

entonces, el núcleo de esta ecuación es $\tilde{K}(x, t) \rho(t)$ y claramente no es simétrico si la función $\tilde{K}(x, t)$ sí es simétrica. No obstante, si definimos una función $\psi(x)$ como

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} \phi(x), \quad (7.72)$$

entonces, ψ pasa a jugar el papel de función incógnita y debe satisfacer la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{\rho(x)} \tilde{f}(x) + \lambda \int_a^b \sqrt{\rho(x)} \tilde{K}(x, t) \sqrt{\rho(t)} \sqrt{\rho(t)} \phi(t) dt \\ &= \sqrt{\rho(x)} \tilde{f}(x) + \lambda \int_a^b \sqrt{\rho(x)} \tilde{K}(x, t) \sqrt{\rho(t)} \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Pero notemos que, en este caso, el núcleo de la ecuación integral anterior ahora es la función $\sqrt{\rho(x)} \tilde{K}(x, t) \sqrt{\rho(t)}$, la cual satisface justamente la propiedad de simetría. De este modo, tenemos que $\psi(x)$ satisface una ecuación integral con núcleo simétrico, es decir

$$\psi(x) = \sqrt{\rho(x)} \tilde{f}(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt, \quad (7.74)$$

cuyo núcleo $K(x, t)$ está definido como:

$$K(x, t) := \sqrt{\rho(x)} \tilde{K}(x, t) \sqrt{\rho(t)} = \sqrt{\rho(t)} \tilde{K}(t, x) \sqrt{\rho(t)} = K(t, x),$$

y donde el término de inhomogeneidad está dado por

$$f(x) := \sqrt{\rho(x)} \tilde{f}(x).$$

Esto muestra que estudiar ecuaciones con núcleo simétrico puede abarcar una amplia clase de ecuaciones integrales que no son simétricas.

Vamos ahora a enfocarnos en las ecuaciones de Fredholm homogéneas de segundo tipo, es decir:

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt. \quad (7.75)$$

Suponemos que el núcleo $K(x, t)$ es simétrico y real. Quizás una de las primeras preguntas que podríamos hacernos sobre la ecuación serían: ¿tiene sentido?, o más precisamente: ¿existe un valor propio que satisfaga esta ecuación? Esta pregunta puede responderse afirmativamente. De hecho Courant y Hilbert [12] muestran que, si $K(x, t)$ es continuo, existe al menos uno de esos valores propios y posiblemente un número infinito de estos.

En este punto, es útil observar que la ecuación (7.75) representa un problema de valores propios de operador lineal $\mathcal{K}$ definido mediante la integral del lado derecho que, en general, convierte la función ϕ en alguna otra función. Este hecho lo podemos indicar simbólicamente mediante la ecuación siguiente:

$$\psi(x) = \mathcal{K}\phi(x) := \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt. \quad (7.76)$$

De este modo tenemos que la ecuación integral (7.75) queda escrita como

$$\mathcal{K}\phi(x) := \frac{1}{\lambda} \phi(x), \quad (7.77)$$

en la que podemos ver que, el valor propio asociado al operador $\mathcal{K}$, es $1/\lambda$.

Observamos que, efectivamente, el operador $\mathcal{K}$ es lineal debido a que satisface la propiedad

$$\mathcal{K}(\alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x)) = \alpha_1 \mathcal{K}\phi_1(x) + \alpha_2 \mathcal{K}\phi_2(x). \quad (7.78)$$

Si, además, definimos el producto interno entre dos funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ como:

$$\langle \psi | \phi \rangle := \int_a^b \psi^*(x) \phi(x) dx, \quad (7.79)$$

entonces, podemos apreciar que bajo este producto interno el operador $\mathcal{K}$ es autoconjugado (o hermítico), es decir, que satisface la propiedad:

$$\langle \psi | \mathcal{K}\phi \rangle := \langle \mathcal{K}\psi | \phi \rangle, \quad (7.80)$$

siempre que el núcleo, además de simétrico, sea real. Esta identidad se puede verificar

fácilmente con el producto interno definido arriba:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \mathcal{K} \phi \rangle &= \int_a^b \psi^*(x) \mathcal{K} \phi(x) dx = \int_a^b \psi^*(x) \left[\int_a^b K(x, t) \phi(t) dt \right] dx \\
 &= \int_a^b \int_a^b \psi^*(x) K(x, t) \phi(t) dt dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, t) \psi^*(x) dx \right] \phi(t) dt \\
 &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, t) \psi(x) dx \right]^* \phi(t) dt = \int_a^b [\mathcal{K} \psi(x)]^* \phi(t) dt. \tag{7.81}
 \end{aligned}$$

Es decir, tenemos,

$$\langle \psi | \mathcal{K} \phi \rangle = \int_a^b [\mathcal{K} \psi(x)]^* \phi(t) dt = \langle \mathcal{K} \psi | \phi \rangle, \tag{7.82}$$

que es la propiedad de hermiticidad (autoconjugado) que habíamos anticipado en la ecuación (7.80).

La linealidad y la hermiticidad indican que podemos confirmar que $\mathcal{K}$ tiene las propiedades clave que nos permiten declarar que sus valores propios son reales y (excepto en el caso de degeneración) sus vectores propios son ortogonales. Si bien lo anterior constituye una demostración completa de la ortogonalidad de nuestras soluciones a la ecuación homogénea de Fredholm, confirmemos estas propiedades de manera explícita.

Comencemos suponiendo que ϕ_i y ϕ_j son dos funciones propias del operador $\mathcal{K}$ asociadas a valores propios que denotaremos por λ_i y λ_j respectivamente. Esto se puede escribir explícitamente como:

$$\frac{1}{\lambda_i} \phi_i(x) = \int_a^b K(x, t) \phi_i(t) dt, \tag{7.83}$$

$$\frac{1}{\lambda_j} \phi_j(x) = \int_a^b K(x, t) \phi_j(t) dt. \tag{7.84}$$

Si multiplicamos la ecuación (7.83) por $\phi_j^*(x)$ y la ecuación (7.84) por $\phi_i^*(x)$, y si integramos de a a b , obtendremos:

$$\frac{1}{\lambda_i} \int_a^b \phi_j^*(x) \phi_i(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \phi_j^*(x) \phi_i(t) dt dx \tag{7.85}$$

$$\frac{1}{\lambda_j} \int_a^b \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \phi_i^*(x) \phi_j(t) dt dx. \tag{7.86}$$

Ya que hemos requerido que el núcleo $K(x, t)$ sea real y simétrico (para que el operador $\mathcal{K}$ sea autoconjugado), entonces usaremos esta propiedad para reescribir la identidad (7.86).

Primero, vamos a tomar el complejo conjugado de cada miembro de la ecuación indicada, es decir,

$$\frac{1}{\lambda_j^*} \int_a^b \phi_i(x) \phi_j^*(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \phi_i(x) \phi_j^*(t) dt dx. \quad (7.87)$$

Nótese que $K(x, t)$ queda inalterado porque es real. Ahora, como las variables de integración son mudas, las podemos remplazar por cualquier otra variable, pero en particular podemos intercambiarlas entre sí, es decir, intercambiaremos x por t en esta última integral doble:

$$\frac{1}{\lambda_j^*} \int_a^b \phi_i(x) \phi_j^*(x) dx = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \phi_i(t) \phi_j^*(x) dt dx. \quad (7.88)$$

Nótese nuevamente que $K(x, t)$ queda inalterado por la propiedad de simetría.

Ahora tomaremos cada miembro de la ecuación (7.88) y lo restaremos a cada miembro de la ecuación (7.85) respectivamente, con lo que se obtiene la igualdad:

$$\left(\frac{1}{\lambda_j^*} - \frac{1}{\lambda_i} \right) \int_a^b \phi_j^*(x) \phi_i(x) dx = 0. \quad (7.89)$$

Exactamente como se argumentó en el caso de la teoría de Sturm-Liouville, tenemos que, cuando los valores propios son iguales, claramente la igualdad anterior se satisface. Sin embargo, si los valores propios fueran diferentes, $\lambda_i \neq \lambda_j$, entonces, la única forma de satisfacer la igualdad anterior es que la integral sea cero, es decir, el producto interno:

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \int_a^b \phi_j^*(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad i \neq j, \quad (7.90)$$

lo que implica que cualesquiera dos funciones propias del operador autoconjugado $\mathcal{K}$, asociados a valores propios diferentes por supuesto, son ortogonales. Es importante mencionar que este resultado se puede extender al caso en el que $K(x, t)$ es hermítico, es decir, si cumple con la condición $K(x, t) = K^*(t, x)$, ya que todos los pasos realizados hasta ahora son válidos cuando establecemos esa condición.

Debe enfatizarse que esta teoría de Hilbert-Schmidt se ocupa solamente de establecer las propiedades de los valores propios (reales) y las funciones propias (ortogonalidad, completitud), las cuales pueden ser de gran interés y valor en problemas prácticos. Es importante mencionar que la teoría de Hilbert-Schmidt no resuelve la ecuación integral homogénea así como la teoría de Sturm-Liouville no resuelve las ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones de la ecuación integral se obtienen mediante la aplicación de técnicas como las que se introdujeron en las secciones anteriores o quizás, incluso, mediante métodos numéricos.

Si el valor propio λ_i es degenerado, entonces, las funciones propias para ese valor propio particular pueden ortogonalizarse mediante el procedimiento de Gram-Schmidt (cf. por ejemplo referencia [30]). Por supuesto, nuestras funciones propias ortogonales pueden normalizarse, y podemos suponer que así se ha hecho, de modo que

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \int_a^b \phi_i^*(x) \phi_j(x) dx = \delta_{i,j}.$$

Se puede demostrar que las funciones propias de nuestras ecuaciones integrales forman un conjunto completo en el sentido de que, si dada una función $g(x)$ que pueda ser generada por la integral,

$$g(x) = \int_a^b K(x, t) h(t) dt, \quad (7.91)$$

siendo $h(t)$ una función continua por partes, entonces, $g(x)$ puede representarse como un desarrollo en serie de las funciones propias $\{\phi_i\}$, es decir,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (7.92)$$

Se puede demostrar que la serie (7.92) converge uniforme y absolutamente. Extendamos esto al núcleo $K(x, t)$, es decir, si dicha función es suficientemente bien comportada, podríamos afirmar también que:

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \phi_n(t), \quad (7.93)$$

donde los coeficientes del desarrollo, claramente son funciones que dependen de la variable x , tal como lo hemos dejado indicado. Sustituyendo en la ecuación integral original, la ecuación (7.75), y usando la integral de ortogonalidad, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \lambda_i \int_a^b K(x, t) \phi_i(t) dt = \lambda_i \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \phi_n(t) \phi_i(t) dt \\ &= \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \int_a^b \phi_n(t) \phi_i(t) dt \\ &= \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \delta_{n,i} = \lambda_i c_n(x), \end{aligned} \quad (7.94)$$

es decir, los coeficientes del desarrollo en la serie (7.93) están dados por:

$$c_n(x) = \frac{\phi_i(x)}{\lambda_i}. \quad (7.95)$$

Por lo tanto, para nuestra ecuación homogénea de Fredholm de segundo tipo, el núcleo puede ser expresado en términos de funciones propias y valores propios como:

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(t)}{\lambda_n}. \quad (7.96)$$

La ecuación (7.96), en realidad, no es un resultado nuevo. En el capítulo de la función de Green, en la sección 8.2, identificaremos $K(x, t)$, allá denotado por $G(x, t)$, como la función de Green. Sin embargo, es posible que el desarrollo dado por la expresión (7.96) pueda no existir.

Ahora continuamos con la teoría de Hilbert-Schmidt buscando soluciones de la ecuación integral no homogénea:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\phi(t) dt. \quad (7.97)$$

Vamos a suponer que las soluciones de la ecuación integral homogénea correspondiente son conocidas, es decir, conocemos el conjunto de funciones $\phi_n(x)$ tales que:

$$\phi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)\phi_n(t) dt, \quad (7.98)$$

donde $\phi_n(x)$ es la función propia correspondiente al valor propio λ_n . Debemos tener en cuenta que, en este punto, no estamos asumiendo nada acerca de λ ; es solamente una constante que no tiene una relación específica con los valores propios λ_n de la ecuación integral homogénea. Desarrollaremos, ahora, tanto $\phi(x)$ como $f(x)$ en sendas series de las funciones propias $\{\phi_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad (7.99)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x). \quad (7.100)$$

Como las funciones propias son conocidas, claramente podemos calcular los coeficientes a_n y b_n empleando la regla de ortogonalidad. No es difícil mostrar que

$$a_n = \int_a^b \phi_n^*(x)\phi(x) dx, \quad (7.101)$$

$$b_n = \int_a^b \phi_n^*(x)f(x) dx. \quad (7.102)$$

Es claro que los coeficientes b_n son conocidos (pues $f(x)$ es dada de inicio), mientras que los coeficientes a_n permanecen como incógnitas mientras no tengamos la solución $\phi(x)$.

Si sustituimos las expresiones (7.99) y (7.100) en la ecuación integral no homogénea (7.97), tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b K(x, t) \phi_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \phi_n(x)}{\lambda_n},\end{aligned}\tag{7.103}$$

en donde hemos intercambiado la suma con la integral con la finalidad de utilizar la igualdad (7.98), la ecuación integral de valores propios y funciones propias, para obtener una ecuación algebraica como veremos a continuación. Notemos que la identidad hallada en la ecuación (7.104) puede escribirse en forma resumida como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda a_n}{\lambda_n} \phi_n(x).\tag{7.104}$$

Obsérvese que, debido a que las funciones propias ϕ_n son linealmente independientes, los coeficientes correspondientes deben satisfacer la igualdad:

$$a_n = b_n + \frac{\lambda}{\lambda_n} a_n.\tag{7.105}$$

Esta última identidad puede reescribirse como:

$$a_n = b_n + \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} b_n,\tag{7.106}$$

es decir, resolvimos para a_n en términos de los coeficientes b_n , es decir, hemos obtenido los coeficientes que inicialmente eran desconocidos.

Si ahora tomamos la expresión anterior y la multiplicamos por $\phi_n(x)$ y sumamos sobre n de $n = 1$ a infinito, obtenemos lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \phi_n(x)}{\lambda_n - \lambda},\tag{7.107}$$

o bien, reconociendo las series para $\phi(x)$ y $f(x)$ [cf. ecs. (7.99) y (7.100)], nos queda la igualdad:

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} \phi_n(x),\tag{7.108}$$

esto es, hemos obtenido la solución a la ecuación no homogénea (7.97) como un desarrollo en serie de funciones propias del operador $\mathcal{K}$, es decir, la soluciones de la ecuación homogénea asociada dada en la ecuación (7.98). Cabe recordar que en la expresión anterior los coeficientes b_n son valores conocidos, pues resultan de desarrollar en serie la función dada $f(x)$ como una serie de las funciones propias ϕ_n , es decir,

$$b_n = \int_a^b \phi_n^*(x) f(x) dx. \quad (7.109)$$

Resumen de solución de la ecuación integral no homogénea

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt. \quad (7.110)$$

Cuando $K(x, t)$ es un núcleo simétrico, la solución está dada por

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} \phi_n(x). \quad (7.111)$$

$$b_n = \int_a^b \phi_n^*(x) f(x) dx.$$

siendo λ_n y $\phi_n(x)$ los valores propios y las funciones propias asociadas al núcleo $K(x, t)$

$$\phi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t) \phi_n(t) dt, \quad (7.112)$$

$$(7.113)$$

Ejemplo 7.5.1. Vamos ahora a poner en práctica la teoría de Hilbert-Schmidt mediante un ejemplo sencillo. Considere la ecuación integral no homogénea:

$$\phi(x) = x^3 + \int_{-1}^1 (t + x) \phi(t) dt. \quad (7.114)$$

Buscaremos las soluciones de esa ecuación usando la metodología mencionada. Sin embargo, es importante recordar que, para este propósito, es indispensable, primero, resolver la ecuación homogénea asociada, es decir, tenemos que hallar los valores propios λ_n y las funciones propias $\phi_n(x)$

$$\phi(x) = x^3 + \lambda \int_{-1}^1 (t + x) \phi(t) dt. \quad (7.115)$$

En el ejercicio [7](#) del presente capítulo, se invita al lector a realizar el cálculo correspondientes, mientras aquí podemos adelantar el resultado. Las funciones propias y los valores propios correspondientes están dados por:

$$\phi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{con} \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (7.116)$$

$$\phi_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{con} \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (7.117)$$

Lo que tenemos que hacer es aplicar las fórmulas dadas en las ecuaciones [\(7.111\)](#) y [\(7.112\)](#). Primero, a partir de la ecuación [\(7.114\)](#) podemos identificar la función $f(x)$ como $f(x) = x^3$ y la constante λ como $\lambda = 1$. Entonces, los coeficientes b_1 y b_2 se pueden obtener como sigue. En primer lugar, aplicamos la fórmula para b_1 :

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_{-1}^1 x^3 \phi_1^*(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x^3 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \left(x^4 + \frac{1}{\sqrt{3}} x^3 \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=-1}^1 \end{aligned} \quad (7.118)$$

lo que, después de evaluar, resulta en:

$$b_1 = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad (7.119)$$

Por otro lado, aplicando la fórmula para b_2 obtenemos:

$$\begin{aligned} b_2 &= \int_{-1}^1 x^3 \phi_2^*(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 x^3 \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{1}{\sqrt{3}} x^3 \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=-1}^1 \end{aligned} \quad (7.120)$$

lo que, después de evaluar, queda como

$$b_2 = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad (7.121)$$

Ahora, vamos a sustituir estos resultados en la ecuación [\(7.111\)](#), de modo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x^3 + \sum_{n=1}^2 \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda} \phi_n(x) \\ &= x^3 + \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}}{5} \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= x^3 + \frac{3}{10} \frac{1}{\sqrt{3} - 2} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{3}{10} \frac{1}{\sqrt{3} + 2} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (7.122)$$

Después de hacer unas cuantas simplificaciones, es posible ver que la solución queda como:

$$\phi(x) = x^3 - \frac{6}{5} \left(2x + 1 \right). \quad (7.123)$$

7.6. Ejercicios

1. Usa la serie de Neumann para resolver las siguientes ecuaciones,

$$\phi(x) = 1 + \int_0^1 tx \phi(t) dt,$$

$$\phi(x) = 1 - 2 \int_0^x t \phi(t) dt,$$

$$\phi(x) = x + \int_0^x (t - x) \phi(t) dt.$$

2. Usa el método de núcleo separable así como la serie de Neumann para resolver la ecuación integral no homogénea:

$$\phi(x) = x + \int_0^1 (1 + tx) \phi(t) dt,$$

3. Resuelve la ecuación integral

$$\phi(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x - t) \phi(t) dt,$$

usando los métodos siguientes: *i*) la serie de Neumann, *ii*) la reducción de la ecuación integral a una ecuación diferencial ordinaria, y *iii*) la transformada de Laplace.

4. Encuentra los valores propios y las funciones propias de

$$\phi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(t - x) \phi(t) dt.$$

5. Considera la ecuación

$$\phi(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x - t) \phi(x) dx,$$

donde λ es una constante dada.

- (*i*) Resuelve la ecuación usando la serie de Neumann.
 (*ii*) Escribe la ecuación integral como una ecuación diferencial derivando dos veces.
 Usa el hecho de que

$$\int_a^x (x - t) f(t) dt = \int_a^x \int_a^s f(t) dt ds.$$

Escribe, además, explícitamente las condiciones iniciales y resuelve la ecuación diferencial con dichas condiciones.

6. Muestra por sustitución directa que la ecuación de Fredholm de primer tipo

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} \phi(t) dt,$$

tiene como solución

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite y

$$f^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n f}{dx} \right|_{x=0}.$$

Sugerencia: Observa que $e^{-(x-t)^2}$ se puede escribir como la función generatriz de los polinomios de Hermite y emplea la regla de ortogonalidad.

7. Obtén las funciones propias ϕ y los valores propios λ_n definidos por la ecuación integral

$$\phi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (t+x) \phi(t) dt.$$

8. Sigue los pasos de la sección [7.5](#) para demostrar la ortogonalidad de las funciones propias definidas por la ecuación integral,

$$\phi = \lambda \int_a^b K(x,t) \phi(t) dt,$$

en el caso en que el núcleo es hermítico, es decir, que satisface la propiedad de simetría bajo conjugación compleja: $K(x,t) = K^*(t,x)$.

9. Usa la teoría Hilbert-Schmidt para resolver la ecuación integral no homogénea siguiente:

$$\phi(x) = x + \frac{1}{2} \lambda \int_{-1}^1 (t+x) \phi(t) dt.$$

10. Como ejemplo del tipo de comportamiento patológico que puede ocurrir, se invita al lector a aplicar la teoría de Hilbert-Schmidt a la ecuación integral:

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \phi(t) dt.$$

11. Considera la ecuación integral no homogénea:

$$\phi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt \phi(t) dt.$$

- i.* Determina la solución como una serie de Neumann y encuentra el intervalo de valores de λ en el cual la serie es convergente.
- ii.* Obtén los valores propios y las funciones propias de la ecuación homogénea correspondiente.
- iii.* Usa el hecho de que el núcleo es separable para volver a resolver la ecuación no homogénea inicial.
- iii.* Usa la teoría de Hilbert-Schmidt para volver a resolver la misma ecuación. Prueba que los tres métodos de solución son consistentes entre sí.

Capítulo 8

Funciones de Green

Hasta ahora, hemos establecido varias técnicas para resolver problemas que pueden escribirse como ecuaciones diferenciales o integrales. En el caso de las ecuaciones diferenciales, hemos restringido la discusión a problemas homogéneos, es decir, a ecuaciones diferenciales en la forma

$$\mathcal{L}y = 0, \tag{8.1}$$

siendo $\mathcal{L}$ un operador diferencial (tal vez en su forma Sturm-Liouville). Nos hemos limitado a establecer técnicas y presentar funciones para resolver problemas homogéneos, dejando de lado los problemas no-homogéneos, esto es, ecuaciones del tipo

$$\mathcal{L}y = f(x), \tag{8.2}$$

siendo $f(x)$ una función dada, habitualmente denominado en física como término *fente* de la ecuación diferencial □.

Las funciones de Green se construyen a partir de las soluciones de un problema homogéneo y que sirven para obtener la solución del problema no-homogéneo asociado. Esto es, todas las técnicas desarrolladas hasta ahora, se pueden considerar como un punto de partida para construir las soluciones de problemas no-homogéneos, los cuales aparecen frecuentemente en el estudio de la física, como en la mecánica de fluidos o el electromagnetismo. Además, es preciso hacer notar que las funciones de Green están íntimamente relacionadas con las ecuaciones integrales tal como veremos más adelante.

A continuación, vamos establecer la teoría de las funciones de Green como método para resolver problemas en una dimensión, aunque la mayor parte de estas ideas se pueden extender a más de una, tal como veremos en secciones posteriores.

¹En dinámica de fluidos, por ejemplo, el termino $f(x)$ representaría una fuente de fluido, es decir, la función que modela la “aparición” del fluido en el sistema bajo estudio.

8.1. Funciones de Green en 1D

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea en su forma Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x). \quad (8.3)$$

Estamos interesados en hallar la solución a este problema con las condiciones de frontera siguientes,

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (8.4)$$

De manera abstracta hemos, continuamente, representado esta ecuación diferencial en términos de operadores, es decir,

$$\mathcal{L}y = f. \quad (8.5)$$

Ya hemos establecido que los operadores diferenciales son operadores lineales y con muchas características similares a aquellos que actúan sobre espacios vectoriales euclidianos. Esta forma de ver los operadores diferenciales nos obliga a preguntarnos, por ejemplo, si, como otra clase de operadores lineales, estos tienen inversa. Si pudiéramos hallar un operador inverso para $\mathcal{L}$, podríamos obtener la solución al problema directamente como

$$y = \mathcal{L}^{-1}f. \quad (8.6)$$

Siguiendo un razonamiento elemental, podríamos convencernos de que el operador inverso debería ser un operador integral, pues la operación de integración simple tiene en la operación derivada su inversa, como bien sabemos del cálculo elemental. No es difícil convencerse de que el operador $\mathcal{L}^{-1}$ podría tener la forma

$$y = \mathcal{L}^{-1}f = \int_a^b G(x, t)f(t)dt. \quad (8.7)$$

Esto es debido a que, al ser el operador diferencial $\mathcal{L}$ lineal, se esperaría que el operador inverso (operador integral) fuese también lineal.

Partiendo de la hipótesis de que el operador inverso tendría la forma (8.7), podemos ver que al aplicar el operador $\mathcal{L}$ a y se obtiene

$$\mathcal{L}y = f = \mathcal{L} \int_a^b G(x, t)f(t)dt. \quad (8.8)$$

Y, como $\mathcal{L}$ es un operador diferencial que solo afecta a la variable x obtenemos que

$$f = \int_a^b \mathcal{L}G(x, t)f(t)dt. \quad (8.9)$$

Para que se cumpla la igualdad anterior es necesario que

$$\mathcal{L}G(x, t) = \delta(x - t), \quad (8.10)$$

donde $\delta(x - t)$ es la delta de Dirac.

En este punto conviene recordar algunas características de la delta de Dirac. Es sabido que $\delta(x - t)$ se puede interpretar como una “función” de la variable x que es cero para cualquier valor excepto en $x = t$. Además, cuando opera bajo el signo integral multiplicada con una función integrable, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - t)dx = f(t). \quad (8.11)$$

Estrictamente hablando, dentro del marco general de la teoría de la medida, la delta se define como una medida en $\mathbb{R}$, que es singular respecto de la medida de Lebesgue, de manera que al integrar cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ respecto de dicha medida, resulta en la propiedad equivalente dada por la identidad (8.11) [54]. Dentro de la teoría de distribuciones, la delta de Dirac se puede definir como una *función generalizada* que se puede interpretar como un funcional lineal en el espacio de funciones [29]. De esta forma, la delta de Dirac, como cualquier distribución, solo tiene sentido bajo el signo de integración.

Bajo estas especificaciones, la ecuación (8.10) puede interpretarse como el *casi* el problema homogéneo: buscamos una función G que satisfaga que $\mathcal{L}G(x, t)$ es cero todos lados excepto en $x = t$ donde $\mathcal{L}G(x, t)$ diverge, tal como lo especifica la delta de Dirac. Esto quiere decir que, a excepción del punto $x = t$, la función G debe poder construir a partir de las soluciones del problema homogéneo,

$$\mathcal{L}y = 0, \quad (8.12)$$

el que hemos estudiado ampliamente en secciones previas. Como el punto $x = t$ es especial, exploremos las propiedades de la función $G(x, t)$ en ese caso. Explícitamente la ecuación (8.10) se escribe en la forma

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG}{dx} \right) + q(x)G(x, t) = \delta(x - t). \quad (8.13)$$

Si integramos respecto a x la ecuación (8.20) desde $t - \epsilon$ hasta $t + \epsilon$ obtenemos

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG}{dx} \right) dx + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x)G(x, t)dx = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(x - t)dx, \quad (8.14)$$

lo cual es equivalente a

$$p(x) \frac{dG}{dx} \Big|_{x=t-\epsilon}^{x=t+\epsilon} + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x)G(x, t)dx = 1. \quad (8.15)$$

La ecuación anterior nos dice unas cuantas cosas acerca de las propiedades de la función $G(x, t)$. La función $G(x, t)$ puede suponerse regular en todo $x \neq t$ (pues se construyen con las soluciones del problema homogéneo), y el único comportamiento irregular que G podría exhibir sería en el punto $x = t$. Hay tres escenarios posibles para G : *i*) que $G(x, t)$ sea continua en $x = t$, *ii*) que sea discontinua con un salto finito, o bien, *iii*) que sea una singularidad (discontinua con salto infinito).

Supongamos que $G(x, t)$ es singular en $x = t$, esto es, discontinua con salto infinito. Si eso fuera cierto, entonces, la solución no podría estar bien definida en términos del operador integral dado por la ecuación (8.7), la integral

$$y(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt, \quad (8.16)$$

no estaría bien definida si, por ejemplo, $f(x)$ fuera acotada. Esto descarta la posibilidad de que $G(x, t)$ sea singular en $x = t$.

Supongamos que $G(x, t)$ tiene una discontinuidad en $x = t$, pero como se ha descartado la singularidad, nos queda la posibilidad de que haya una discontinuidad de salto finito. Si ese fuera el caso, entonces la integral

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x) G(x, t) dx$$

sería finita. Esto tampoco es posible en vista de la igualdad (8.15). Si $G(x, t)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = t$, entonces, la derivada dG/dx tendría una discontinuidad de salto infinito, haciendo que la ecuación (8.15) sea inconsistente. La única posibilidad que queda entonces es que la función $G(x, t)$ sea continua. No obstante, la identidad (8.15) nos indica que la derivada de G respecto a x es discontinua (con salto finito), e incluso nos dice cuál es el tamaño de la discontinuidad. Si tomamos el límite cuando ϵ tiende a cero, nos queda claro que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} q(x) G(x, t) dx = 0,$$

por lo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(x) \frac{dG}{dx} \bigg|_{x=t-\epsilon}^{x=t+\epsilon} = 1, \quad (8.17)$$

o bien, si $p(x)$ es continua en $[a, b]$, es claro que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dx} \bigg|_{x=t-\epsilon}^{x=t+\epsilon} = \frac{1}{p(t)}, \quad (8.18)$$

lo que indica que el tamaño de la discontinuidad de la derivada de G respecto a x es $1/p(t)$ en $x = t$.

Más aún, podemos también verificar sin mucho problema que, si $y(x)$ satisface las condiciones de frontera dadas en la ecuación (8.4), entonces, $G(x, t)$ debe satisfacer las condiciones de frontera

$$G(a, t) = 0, \quad G(b, t) = 0. \quad (8.19)$$

Procederemos ahora a construir la función $G(x, t)$. Como sabemos que G tiene derivada discontinua en $x = t$, vamos a dividir el intervalo $[a, b]$ (el intervalo en el que buscamos la solución a nuestro problema no-homogéneo) en dos partes: en los intervalos $[a, t]$ y $(t, b]$. Es claro que en cada uno de estos intervalos la función $G(x, t)$ satisface la ecuación homogénea, es decir,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dG}{dx} \right) + q(x)G(x, t) = 0. \quad (8.20)$$

No es difícil convencerse de que la función $G(x, t)$ debe coincidir con alguna solución del problema homogéneo en cada uno de los intervalos mencionados, esto es, si $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones del problema homogéneo (8.20), entonces, podemos proponer que $G(x, t)$ tenga la forma

$$G(x, t) = \begin{cases} c_1(t)u(x) & \text{si } a \leq x \leq t \\ c_2(t)v(x) & \text{si } t < x \leq b \end{cases} \quad (8.21)$$

Debemos notar además de que la función $G(x, t)$ debe satisfacer las condiciones de frontera de nuestro problema original, tal como se mencionó anteriormente en la ecuación (8.19). Entonces, las funciones $u(x)$ y $v(x)$ deben ser tales que

$$u(a) = 0, \quad v(b) = 0. \quad (8.22)$$

Ahora, como $G(x, t)$ debe ser continua en $x = t$ es claro que

$$c_1(t)u(t) = c_2(t)v(t), \quad (8.23)$$

y como la derivada debe ser discontinua con tamaño de salto $1/p(t)$ en $x = t$, tal como se dejó indicado en la igualdad (8.18), tenemos además que

$$c_2(t)v'(t) - c_1(t)u'(t) = \frac{1}{p(t)}. \quad (8.24)$$

Recordemos ahora que si dos funciones u y v son soluciones de un problema tipo Sturm-Liouville, entonces, el wronskiano de dichas funciones viene dado por

$$u(t)v'(t) - v(t)u'(t) = \frac{A}{p(t)}, \quad (8.25)$$

siendo A una constante.

Si comparamos la ecuación anterior con la igualdad (8.24) podemos ver que las constantes $c_1(t)$ y $c_2(t)$ vendrían dadas por

$$c_2(t) = \frac{u(t)}{A}, \quad c_1(t) = \frac{v(t)}{A}. \quad (8.26)$$

Hay que notar que esta elección de las constantes c_1 y c_2 también satisfacen la condición (8.23), esto es, $c_1(t)u(t) = c_2(t)v(t)$.

En conclusión, tomar las constantes c_1 y c_2 como se propone en (8.26) resulta en una función $G(x, t)$ que satisface todos los requisitos impuestos para que el operador integral propuesto sea la inversa del operador $\mathcal{L}$. Explícitamente tenemos que $G(x, t)$ tiene la forma

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{A}v(t)u(x) & \text{si } a \leq x \leq t \\ \frac{1}{A}u(t)v(x) & \text{si } t < x \leq b \end{cases} \quad (8.27)$$

Esta función recibe el nombre de *función de Green*, y recibe ese nombre en honor al matemático británico George Green [10].

En este punto conviene hacer algunas precisiones respecto de la validez de la fórmula (8.30). Como hemos mencionado, para la construcción de la función de Green requerimos de dos funciones, u y v , que son soluciones linealmente independientes del problema homogéneo (8.20). Si el problema homogéneo mencionado no posee dos soluciones linealmente independientes, entonces, el wronskiano entre dos soluciones de (8.20) es igual a cero, con lo cual, la función de Green en la fórmula (8.30) queda indeterminada. Con eso, podemos notar que la existencia de la función de Green es equivalente a la existencia de una solución única al problema homogéneo $\mathcal{L}y = f$ con condiciones de frontera especificadas en la ecuación (8.4). No obstante, aun bajo la condición de no existencia de dos soluciones linealmente independientes, se pueden construir funciones de Green en un sentido generalizado. El lector interesado puede recurrir al libro de Hilbert y Courant [12] en donde se indica cómo construir funciones de Green en este caso.

Ejemplo 8.1.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x), \quad (8.28)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (8.29)$$

Comencemos observando que las soluciones al problema homogéneo $y'' = 0$ están dadas por

$$y(x) = a_1x + a_2,$$

donde a_1 y a_2 son dos constantes de integración. Si tomamos y_1 como la función que satisface la condición de frontera $y(0) = 0$, podemos decir que

$$y_1(x) = x.$$

Si definimos ahora y_2 como una solución del problema homogéneo que satisface la condición de frontera $y(1) = 0$, entonces, podemos ver que

$$y_2(x) = 1 - x.$$

Calculemos ahora el wronskiano de las funciones y_1 y y_2 ,

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = -x + (1 - x) = 1,$$

y como la función $p(x)$ de la ecuación (8.28), tenemos que la constante A debe ser $A = 1$. De acuerdo con la expresión (8.30), la función de Green de nuestro problema se escribe como,

$$G(x, t) = \begin{cases} (1 - t)x & \text{si } 0 \leq x \leq t \\ (1 - x)t & \text{si } t < x \leq 1. \end{cases} \quad (8.30)$$

Es necesario señalar también que, debido a la simetría de la función de Green, ($G(x, t) = G(t, x)$) podemos observar que en este caso, $G(x, t)$ también puede escribirse como,

$$G(x, t) = \begin{cases} (1 - x)t & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ (1 - t)x & \text{si } x < t \leq 1, \end{cases} \quad (8.31)$$

en donde hemos simplemente intercambiado los papeles de las variables x y t .

Tomemos ahora una función específica para $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = \sin(\pi x)$, entonces, la solución al problema

$$y''(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

para $x \in [0, 1]$ está dada, en términos de la función de Green (8.31), por

$$y(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t)dt = \int_0^x (1 - x)t \sin(\pi t)dt + \int_x^1 (1 - t)x \sin(\pi t)dt. \quad (8.32)$$

Integrando por partes las integrales de la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= (1 - x)\frac{1}{\pi} \left[-t \cos(\pi t) \Big|_0^x + \int_0^x \cos(\pi t)dt \right] + x\frac{1}{\pi} \left[-(1 - t) \cos(\pi t) \Big|_x^1 - \int_x^1 \cos(\pi t)dt \right] \\ &= \frac{(1 - x)}{\pi} \left[-x \cos(\pi x) + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right] + \frac{x}{\pi} \left[(1 - x) \cos(\pi x) + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right] \\ &= \left[-\frac{(1 - x)x}{\pi} \cos(\pi x) + (1 - x)\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} \right] + \left[\frac{(1 - x)x}{\pi} \cos(\pi x) + x\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2} \right] \end{aligned} \quad (8.33)$$

de donde podemos ver que la solución a nuestro problema está dada por

$$y(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}, \quad (8.34)$$

lo que coincide con la integración directa del problema.

8.2. Funciones de Green en dimensiones superiores

Hemos visto que, en el caso de una dimensión, la construcción de una función de Green nos permite resolver el problema no homogéneo asociado a un operador con la forma Sturm-Liouville. Es decir, si queremos resolver el problema no homogéneo:

$$\mathcal{L}y = f(x), \quad (8.35)$$

podemos obtener la solución a partir de la función de Green, la cual, a su vez, es solución de la ecuación:

$$\mathcal{L}G(x, t) = \delta(x - t), \quad (8.36)$$

es decir, si logramos obtener la función $G(x, t)$ (que satisface las mismas condiciones de frontera que la solución buscada), entonces, tenemos que la solución $y(x)$ puede escribirse como:

$$y(x) = \int G(x, t)f(t)dt. \quad (8.37)$$

Esta idea se puede extender al caso de múltiples dimensiones siempre y cuando el problema Sturm-Liouville esté bien definido. Si bien la teoría de las funciones de Green se puede extender a más dimensiones, no así la técnica para construirlas que se empleó en el caso unidimensional. No obstante, se pueden obtener varias propiedades generales y calcular de manera exacta en casos especiales.

Primero, debemos establecer el problema Sturm-Liouville en más de una dimensión. No es difícil darse cuenta de que la versión multidimensional (para campos escalares) del operador SL:

$$\mathcal{L}y = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x), \quad (8.38)$$

debería tener la forma:

$$\mathcal{L}\psi = \nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \right) + q(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (8.39)$$

Es necesario indicar que, aunque tiene la generalización obvia del operador SL en varias dimensiones, eso no basta para que sea un operador autoconjugado. De hecho, como vimos

en el capítulo 2.2, un operador con la forma anterior será autoconjugado si las condiciones de frontera nos permiten verificar la siguiente identidad:

$$\langle \phi | \mathcal{L} | \psi \rangle = \langle \phi | \mathcal{L} \psi \rangle = \langle \mathcal{L} \phi | \psi \rangle, \quad (8.40)$$

para cualesquiera campos escalares $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Nuestro problema consiste, entonces, en hallar la función $\psi(\mathbf{r})$ que sea solución de la ecuación en derivadas parciales no homogénea:

$$\nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \right) + q(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (8.41)$$

en un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ con determinadas condiciones de frontera. Claramente, las funciones $p(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$ y $f(\mathbf{r})$ son funciones dadas.

De manera completamente análoga al caso unidimensional tenemos que si podemos obtener la solución $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ correspondiente al problema asociado:

$$\nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) + q(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (8.42)$$

donde $G : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ satisface las mismas condiciones de frontera que la función $\psi(\mathbf{r})$. Entonces, la solución al problema no homogéneo (8.41) vendrá dada por

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^m \mathbf{r}'. \quad (8.43)$$

A la función $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, definida mediante la ecuación (8.42), se le denomina, al igual que en el caso unidimensional, *función de Green*.

En este punto conviene establecer algunas propiedades generales de las funciones de Green:

- Cualquier función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ satisface la propiedad de simetría bajo la conjugación compleja, esto es:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (8.44)$$

- Las funciones de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ son, en general, continuas y diferenciables en todos los puntos excepto en los que son tales que $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. De hecho, no es indispensable siquiera que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sea continua, incluso en algunos casos la función de Green puede divergir en dichos puntos.

²Nótese que el operador gradiente ∇ opera sobre la variable $\mathbf{r}$ y no sobre $\mathbf{r}'$. Es decir, bajo el operador diferencial ∇ la variable $\mathbf{r}'$ es constante.

- Las funciones de Green se pueden expresar, en general, como desarrollos en serie de funciones propias del operador Sturm-Liouville. Es decir, si $\phi_n(\mathbf{r})$ son las funciones propias del operador $\mathcal{L} = \nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla \right) + q(\mathbf{r})$, es decir,

$$\nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \right) + q(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}) = \lambda_n \phi_n(\mathbf{r}), \quad (8.45)$$

siendo λ_n los correspondientes valores propios asociados, entonces, la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ del problema correspondiente puede escribirse como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}') \phi_n(\mathbf{r})}{\lambda_n}, \quad (8.46)$$

expresión que resulta válida siempre que el operador SL no tenga valores propios nulos, esto es, $\lambda_n > 0$ para cualquier n .³

A continuación, vamos a mostrar esta última identidad, es decir, vamos a construir la función de Green a través de las funciones propias y valores propios de un operador autoconjugado en múltiples dimensiones. De hecho, construiremos la función de Green de un problema un tanto más general.

Supongamos que queremos resolver el problema no homogéneo siguiente:

$$\mathcal{L}\psi(\mathbf{r}) - \lambda\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (8.47)$$

sobre algún dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Es importante señalar que λ es un parámetro arbitrario (pero no es un valor propio del operador diferencial). Es importante, también, dejar indicado que el operador $\mathcal{L}$ está definido como:

$$\mathcal{L} := \nabla \cdot \left(p(\mathbf{r}) \nabla \right) + q(\mathbf{r}).$$

Vamos a mostrar que la función de Green asociada a este problema, es decir, la función de Green que se obtiene resolviendo la ecuación:

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \lambda G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (8.48)$$

³Es importante notar que cuando el operador SL tiene algún valor propio nulo, esto es, que para algún m se tiene que $\lambda_m = 0$ aún se puede definir una función de Green bajo ciertas condiciones. De hecho, un requisito es que la función $f(\mathbf{r})$, el término de inhomogeneidad en la ecuación que queremos resolver, sea tal que $\langle f, \phi_m \rangle = 0$. Esto es, se requiere que f sea ortogonal al subespacio definido por las funciones propias asociadas al valor propio nulo. La construcción de este tipo de funciones de Green no es única y el lector puede profundizar un poco sobre esto en el libro de Russell L. Herman [31].

se puede escribir como:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}') \phi_n(\mathbf{r})}{\lambda_n - \lambda}. \quad (8.49)$$

Notemos que el problema que define la función de Green es *casi* homogéneo, debido a que la función delta de Dirac es cero en todos lados excepto en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Debido a esto, podemos suponer que la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ debería poder expresarse como un desarrollo en serie de funciones propias del operador Sturm-Liouville, es decir,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n c_n(\mathbf{r}') \phi_n(\mathbf{r}), \quad (8.50)$$

donde $c_n(\mathbf{r}')$ son los coeficientes del desarrollo (que dependen de $\mathbf{r}'$, por supuesto) y donde $\phi_n(\mathbf{r})$ son las funciones propias del operador correspondiente, esto es

$$\mathcal{L}\phi_n(\mathbf{r}) = \lambda_n \phi_n(\mathbf{r}). \quad (8.51)$$

Si sustituimos la forma de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, dada por la expresión (8.50), en la ecuación (8.53), obtenemos:

$$\sum_n c_n(\mathbf{r}') \mathcal{L}\phi_n(\mathbf{r}) - \sum_n c_n(\mathbf{r}') \lambda \phi_n(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (8.52)$$

o bien, recordando que $\phi_n(\mathbf{r})$ son funciones propias de $\mathcal{L}$:

$$\sum_n c_n(\mathbf{r}') (\lambda_n - \lambda) \phi_n(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (8.53)$$

Sabemos que las funciones $\phi_n(\mathbf{r})$ forman un conjunto ortogonal como resultado de la teoría Sturm-Liouville. Si suponemos, además, que están normalizadas, entonces, podemos obtener los coeficientes del desarrollo explotando la ortogonalidad de las funciones. Si multiplicamos la ecuación anterior por $\phi_{n'}^*(\mathbf{r})$ y si integramos sobre el dominio $\mathcal{D}$, podemos ver que:

$$\sum_n c_n(\mathbf{r}') (\lambda_n - \lambda) \int_{\mathcal{D}} \phi_{n'}^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}) d^m \mathbf{r} = \int_{\mathcal{D}} \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_{n'}^*(\mathbf{r}) d^m \mathbf{r}. \quad (8.54)$$

Como hemos supuesto que las funciones propias son ortonormales, entonces, tenemos que

$$\int_{\mathcal{D}} \phi_{n'}^*(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}) d^m \mathbf{r} = \delta_{n',n}$$

lo cual resulta en la siguiente identidad:

$$(\lambda_{n'} - \lambda) c_{n'}(\mathbf{r}') = \phi_{n'}^*(\mathbf{r}'), \quad (8.55)$$

lo que nos lleva a escribir los coeficientes del desarrollo $c_n(\mathbf{r}')$ como:

$$c_{n'}(\mathbf{r}') = \frac{\phi_{n'}^*(\mathbf{r}')}{\lambda_n - \lambda}. \quad (8.56)$$

Esto demuestra que efectivamente, la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ puede escribirse como sigue:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n c_n(\mathbf{r}') \phi_n(\mathbf{r}) = \sum_n \frac{\phi_n^*(\mathbf{r}')}{\lambda_n - \lambda} \phi_n(\mathbf{r}), \quad (8.57)$$

lo que demuestra el resultado anticipado.

Finalmente conviene indicar que, aunque el método de la función de Green ha sido presentado para la resolución de problemas no homogéneos, también se puede aplicar en la resolución de otra clase de problemas. Es particularmente conveniente señalar que las funciones de Green se pueden utilizar, por ejemplo, en la resolución de problemas de valor inicial o de frontera con condiciones no-homogéneas, es decir, en los que la solución que se busca toma valores en la frontera que no son constante o aun con condiciones mixtas [48, 38, 36].

8.3. Funciones de Green en 2D y 3D

En espacios de más de una dimensión no podemos dividir la región considerada en dos intervalos tal como lo hicimos en el caso unidimensional. Es decir, no podemos elegir dos regiones a cada lado de un punto que nos permita obtener una solución de la ecuación homogénea apropiada en concordancia con las condiciones en los “extremos”, pues en este caso tenemos toda una frontera continua. Un enfoque más fructífero será a menudo obtener una función de Green para un operador $\mathcal{L}$ sujeto a algunas condiciones de contorno particularmente convenientes, con un plan posterior para agregarle cualquier solución de la ecuación homogénea $\mathcal{L}y = 0$ que pueda ser necesaria para adaptarla a las condiciones de frontera que están realmente bajo consideración. Este enfoque es claramente legítimo, ya que la adición de cualquier solución a la ecuación homogénea no afectará las propiedades de continuidad (y/o discontinuidad) de la función de Green.

Consideremos, primero, el operador de Laplace en tres dimensiones, con la condición de frontera en la que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ desaparece en el infinito. Por lo tanto, buscamos una solución a la ecuación en derivadas parciales no homogénea:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.58)$$

Antes de continuar es necesario recordar que la convención que hemos adoptado es que el operador de Laplace ∇^2 actúa sobre las coordenadas $\mathbf{r}$ (y no sobre $\mathbf{r}'$).

Nótese que nuestra condición de frontera, la cual se puede escribir como

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0,$$

posee simetría esférica y está a una distancia infinita del punto $\mathbf{r}'$. Entonces, podemos hacer la suposición de que $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es función solamente de la distancia $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ ⁴.

Tomemos ahora la ecuación (8.58) e integremos ambos lados de la igualdad al interior de una esfera B_a de radio a centrada en $\mathbf{r}'$:

$$\int_{B_a(\mathbf{r}')} \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = \int_{B_a(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = 1, \quad (8.59)$$

donde hemos reducido el lado derecho de la igualdad usando las propiedades de la función delta de Dirac y escrito el lado izquierdo en una forma que lo prepara para la aplicación del teorema de Gauss. Ahora, aplicamos ese teorema al lado izquierdo de la ecuación (8.59), obteniendo:

$$\int_{\partial B_a(\mathbf{r}')} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2\mathbf{s} = 4\pi a^2 \left. \frac{dG}{dr} \right|_{r=a} = 1. \quad (8.60)$$

Nótese que esta última ecuación es válida para cualquier valor del radio de la esfera $B_a(\mathbf{r}')$, por lo que podemos escribir sin mayor problema la igualdad:

$$\frac{dG}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (8.61)$$

Esta expresión no es más que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que podemos resolver sin mucho esfuerzo, lo que nos da como resultado:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r}, \quad (8.62)$$

y como definimos $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$, es claro que la función de Green para el operador de Laplace 3D viene dada por:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (8.63)$$

La función de Green de la ecuación (8.63) solo es apropiada para un sistema infinito con condiciones de frontera $G = 0$ en el infinito, pero, como ya se mencionó, se puede convertir en funciones de Green de otro problema agregando una solución adecuada a la ecuación

⁴Es decir, es como si tomásemos como origen de nuestro sistema de referencia el punto $\mathbf{r}'$.

homogénea (en este caso, la ecuación de Laplace). Dado que este es un punto de partida razonable para una variedad de problemas, la forma dada en la ecuación (8.63) a veces se denomina función de Green fundamental de la ecuación de Laplace (en tres dimensiones).

Repitamos, ahora, nuestro análisis para el operador de Laplace en dos dimensiones para una región de extensión infinita, usando coordenadas polares $(\mathbf{r}, \phi)$. La integral en la ecuación (8.59) está definida sobre un área circular $B_a(\mathbf{r}')$ de radio a , es decir:

$$\int_{B_a(\mathbf{r}')} \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2\mathbf{r} = \int_{B_a(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2\mathbf{r} = 1, \quad (8.64)$$

y por lo tanto el análogo bidimensional de la ecuación (8.65) resulta ser:

$$\int_{\partial B_a(\mathbf{r}')} \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds = 2\pi a \left. \frac{dG}{dr} \right|_{r=a} = 1. \quad (8.65)$$

Usando el mismo argumento que en el caso 3D, tenemos que esta última igualdad es válida para cualquier valor de a . Por lo tanto, lo anterior define una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se puede resolver directamente. De este modo, tenemos que la función de Green para el operador de Laplace 2D se puede escribir como:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln (||\mathbf{r} - \mathbf{r}'||). \quad (8.66)$$

La forma dada en la ecuación (8.66) se vuelve infinita en el infinito, no obstante, puede considerarse como una función fundamental de Green en 2D. Sin embargo, se debe tener en cuenta que, generalmente, necesitaremos agregarle una solución adecuada a la ecuación de Laplace 2D con el fin de obtener la forma necesaria para problemas específicos.

El análisis anterior indica que la función de Green para la ecuación de Laplace en el espacio 2D es bastante diferente al resultado 3D. Esta observación ilustra el hecho de que existe una diferencia real entre la física plana (2D) y la real (3D), incluso cuando esta última se aplica a problemas de simetría traslacional en una dirección. Este también es un buen momento para observar que la simetría en la función de Green corresponde a la noción de que una fuente en $\mathbf{r}'$ produce un resultado (un “potencial”) en $\mathbf{r}$ que es el mismo que el potencial en $\mathbf{r}'$ de una fuente similar en $\mathbf{r}$. Esta propiedad ocurrirá para funciones de Green asociadas a problemas más complicados siempre y cuando los operadores correspondientes sean autoconjugados.

A continuación, presentamos de forma resumida las funciones de Green asociadas a los operadores de Laplace (∇^2), de Helmholtz ($\nabla^2 + k^2$), así como de Helmholtz modificado ($\nabla^2 - k^2$) en tres dimensiones. En este caso $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ denotan vectores en $\mathbb{R}^3$.

Función de Green para el operador de Laplace 3D: ∇^2

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (8.67)$$

Función de Green para el operador de Helmholtz 3D: $\nabla^2 + k^2$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (8.68)$$

Función de Green para el operador de Helmholtz modificado 3D: $\nabla^2 - k^2$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\exp(-k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (8.69)$$

De igual manera, en analogía con el caso 3D, presentamos ahora las funciones de Green asociadas a los operadores de Laplace (∇^2), de Helmholtz ($\nabla^2 + k^2$), y de Helmholtz modificado ($\nabla^2 - k^2$) en dos dimensiones. En este caso, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ denotan vectores en $\mathbb{R}^2$, mientras que $H_0^{(1)}$ y K_0 denotan a la función de Hankel de primer tipo y la función de Bessel modificada de primer tipo.

Función de Green para el operador de Laplace 2D: ∇^2

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|). \quad (8.70)$$

Función de Green para el operador de Helmholtz 2D: $\nabla^2 + k^2$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|). \quad (8.71)$$

Función de Green para el operador de Helmholtz modificado 2D: $\nabla^2 - k^2$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi} K_0(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|). \quad (8.72)$$

8.4. Ejercicios

1. Muestra que si

$$\mathcal{L}\psi(\mathbf{r}) := \nabla \cdot \left[p(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) \right] + q(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (8.73)$$

entonces, $\mathcal{L}$ es autoconjugado suponiendo condiciones de frontera tipo Dirichlet en un dominio $\mathcal{D}$. Para esto, se define el producto interno como una integral sobre el dominio $\mathcal{D}$ con función de peso igual a uno:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (8.74)$$

2. Demuestra que los términos $+k^2$ en el operador de Helmholtz 3D y $-k^2$ en el operador de Helmholtz modificado 3D no afectan el comportamiento de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en la vecindad alrededor de la singularidad $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, esto es, demuestra que:

$$\lim_{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}} k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}. \quad (8.75)$$

3. Muestra que la función:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}, \quad (8.76)$$

satisface la ecuación que define la función de Green para la ecuación de Helmholtz y satisface las propiedades de una función de Green enunciadas en la sección [8.2](#).

4. Una forma alternativa de obtener la función de Green en 3D asociada al operador de Laplace, consiste en usar la técnica de las transformadas integrales. Si se transforma por Fourier (en la variable $\mathbf{r}$) la ecuación para la función de Green ([8.58](#)), se obtiene:

$$k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (8.77)$$

donde $\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')$ es la transformada de Fourier de $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en la variable $\mathbf{r}$, es decir,

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r}. \quad (8.78)$$

Muestra que la transformada inversa de $\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}')$,

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}}{k^2}, \quad (8.79)$$

nos da como resultado exactamente la función de Green dada por la expresión ([8.67](#)).

5. Obtén las funciones de Green de los operadores de Helmholtz y Helmholtz modificado usando la técnica de la transformada de Fourier como en el ejercicio anterior.

Capítulo 9

Transformadas integrales

Los métodos para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales que involucran transformadas integrales resultan especialmente apropiados cuando los dominios en los que se define el problema tienen dimensiones infinitas. Estos métodos consisten fundamentalmente en aplicar una transformada integral, típicamente de Fourier o de Laplace, a la ecuación en derivadas parciales de n variables. Esto se realiza con el propósito de reducir la ecuación en el espacio transformado a otra ecuación en derivadas parciales con $n - 1$ variables o, incluso, directamente a una ecuación diferencial ordinaria o una ecuación algebraica en caso de tener pocas variables ($n = 2$, por ejemplo). Durante este procedimiento, las condiciones de contorno del problema así como las condiciones iniciales (en caso de que el problema las requiera), se incorporan de manera automática en la transformación.

En términos generales, para ecuaciones de tipo parabólico (que comúnmente hallamos en problemas de difusión), resulta conveniente emplear la transformada de Laplace con respecto al tiempo. Si las variables espaciales se extienden sobre la recta real, la elección apropiada suele ser la transformada de Fourier, como es casi siempre el caso de la ecuación de onda. En casos en los que el espacio es semi-infinito, puede ser beneficioso utilizar transformadas de Fourier seno o coseno, así como transformadas de Laplace. A continuación, ilustraremos esta técnica mediante ejemplos concretos, pero antes daremos un recordatorio de las propiedades elementales de las transformadas de Fourier y de Laplace que pueden ser útiles en el desarrollo posterior de las técnicas de solución.

9.1. La transformada de Fourier y la transformada de Laplace

9.1.1. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier 1D

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función cuadrado-integrable de variable real e imagen compleja. La *transformada de Fourier* de la función $f(x)$ se define como:

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (9.1)$$

La transformada de Fourier de una función $f(x)$ se puede interpretar como un cambio de base entre espacios vectoriales cuando se generaliza el concepto de espacio euclidiano a espacios de Hilbert. Es decir, considerando una función como un elemento $|f\rangle$ de un espacio vectorial abstracto $\mathcal{H}$, podemos pensar que el vector $|f\rangle$ tiene una representación en una base canónica con componentes $f(x)$, mientras que el mismo vector $|f\rangle$ tiene, alternativamente, una representación en otra base, cuyas componentes están dadas $\mathcal{F}[f(x)](k)$. En este capítulo, no vamos a dar detalles sobre la definición formal de la transformada de Fourier como transformación entre bases, solo nos concentraremos en exponer algunas de sus propiedades más elementales y de utilidad práctica en la resolución tanto de ecuaciones ordinarias como de ecuaciones en derivadas parciales. Antes de continuar, es conveniente mencionar que el resultado de la transformación es una función con una variable diferente, la cual se suele representar usando el mismo símbolo de la función, pero con un distintivo. En este sentido, si $f(x)$ es la función original, su transformada se representará por $\tilde{f}(k)$ en lugar de su avatar que indica la transformación funcional $\mathcal{F}[f(x)](k)$. A la postre, esta notación aligerará bastante la representación de los cálculos realizados. También es necesario mencionar que gran parte de las veces, en la notación $\mathcal{F}[f(x)](k)$, se omitirá la variable de transformación k , y solo denotaremos la transformada de Fourier de $f(x)$ como $\mathcal{F}[f(x)]$ o, incluso, como $\mathcal{F}[f]$, siempre que no haya confusión ni ambigüedad con las variables independientes de la función directa, así como de su transformada.

Una de las propiedades básicas de la transformada de Fourier consiste en que la transformación inversa tiene una expresión completamente análoga a la transformación directa. Si $\tilde{f}(k)$ es la transformada de Fourier de una función $f(x)$, esta última se recupera a partir de $\tilde{f}(k)$ con la fórmula:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (9.2)$$

Las ecuaciones (9.14) y (9.2) conforman la pareja de transformación directa e inversa de Fourier.

Es importante también mencionar que la transformación por Fourier es una operación lineal, es decir, que factoriza constantes y se distribuye sobre la suma:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)] = \alpha \tilde{f}(k) + \beta \tilde{g}(k), \quad (9.3)$$

propiedad que se verifica directamente del hecho de que la integración es, igualmente, una operación lineal que hereda a la transformada de Fourier.

Otra propiedad que es particularmente importante es que las derivadas de una función $f(x)$ las transforma en una operación algebraica que involucra la transformada de $f(x)$. Específicamente tenemos que

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] = -ik \mathcal{F}[f(x)](k), \quad (9.4)$$

o bien, utilizando la notación compacta mencionada arriba, tenemos que:

$$\mathcal{F}[f'] = -ik \tilde{f}(k). \quad (9.5)$$

No es difícil verificar esta identidad realizando una integración por partes, e invocando el hecho de que $f(x)$ debe ser cuadrado integrable, directamente en la integral de la definición (9.14). Además de esto, podemos darnos cuenta de que la propiedad (9.5), al iterarla repetidas veces, nos arroja una formula simple para la transformada de Fourier de la n -ésima derivada:

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = (-ik)^n \tilde{f}(k). \quad (9.6)$$

Como hemos mencionado, la operación de derivación bajo la transformada de Fourier, se convierte en una operación de multiplicación, lo que ayuda a “eliminar” derivadas. No obstante, hay una propiedad análoga que convierte una operación de multiplicación por la variable independiente por una derivada, así que hay que tomar con precaución esta aparente ventaja, ya que:

$$\mathcal{F}[(-ix)f(x)] = \frac{d}{dk} \tilde{f}(k). \quad (9.7)$$

Esta propiedad se extiende automáticamente a la n -ésima derivada de la transformada $\tilde{f}(k)$, esto es:

$$\mathcal{F}[(-ix)^n f(x)] = \frac{d^n}{dk^n} \tilde{f}(k), \quad (9.8)$$

lo que se puede demostrar sin mucho esfuerzo por inducción.

Es claro que esta propiedad de la transformación por Fourier elimina la operación de derivación la cual, en el espacio de Fourier, se remplaza por la multiplicación por el factor $-ik$. Posteriormente, se verá que esta propiedad juega un papel crucial en la solución de ecuaciones ordinarias así como de ecuaciones en derivadas parciales.

También hay que mencionar que la transformada de Fourier tiene una propiedad en relación con el escalamiento y traslación de la variable independiente:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} \tilde{f}(k/a), \quad (9.9)$$

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{iak} \tilde{f}(k). \quad (9.10)$$

Finalmente, una propiedad más de la transformada de Fourier es que al transformar la operación de convolución entre dos funciones, se convierte en una operación de multiplicación entre las transformadas de Fourier correspondientes. La convolución $f * g$ entre dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se define como

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy. \quad (9.11)$$

No es difícil probar que la transformada de la convolución resulta en el producto de las transformadas:

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)] = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k). \quad (9.12)$$

De manera análoga, se tiene una propiedad inversa que nos indica que la transformada del producto de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se convierte en la convolución de las transformadas:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = (\tilde{f} * \tilde{g})(k). \quad (9.13)$$

La transformada de Fourier en múltiples dimensiones

El concepto de transformada de Fourier se puede extender al caso de múltiples dimensiones de manera directa. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función cuadrado-integrable, es decir, si se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{r})|^2 d^n \mathbf{r} < \infty, \quad (9.14)$$

entonces, definimos la transformada de Fourier de $f(\mathbf{r})$ como la función:

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^n \mathbf{r}, \quad (9.15)$$

siendo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ la variable independiente de la función transformada. Al igual que en el caso unidimensional usaremos la notación $\tilde{f}(\mathbf{k})$ para denotar la transformada de Fourier de la función $f(\mathbf{r})$.

Varias de las propiedades que ya hemos establecido para el caso unidimensional se pueden extrapolar de manera directa al caso multidimensional. Por ejemplo, es posible verificar de manera directa las identidades para las propiedades de escalamiento y translación para cualquier función cuadrado-integrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}[f(a\mathbf{r})] = \frac{1}{|a|} \tilde{f}(\mathbf{k}/a), \quad (9.16)$$

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \tilde{f}(\mathbf{k}), \quad (9.17)$$

para cualesquiera $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^n$.

En el caso de las derivadas se debe tener en cuenta el carácter vectorial de las operaciones realizadas. Por ejemplo, el gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se transforma por Fourier como:

$$\mathcal{F}[\nabla f(\mathbf{r})] = (i\mathbf{k}) \tilde{f}(\mathbf{k}), \quad (9.18)$$

mientras que la transformada del Laplaciano de f se transforma en:

$$\mathcal{F}[\nabla^2 f(\mathbf{r})] = -k^2 \tilde{f}(\mathbf{k}). \quad (9.19)$$

No está demás hacer notar que el resultado de la transformación en la ecuación (9.18) es una función vectorial, lo que es natural por tratarse de la transformación de un gradiente; en cambio, la transformación del Laplaciano de f resulta en una función escalar ya que $\nabla^2 f$ es igualmente una función escalar.

9.1.2. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, definida sobre los números reales no negativos, es una función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como:

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (9.20)$$

donde la variable compleja s es tal que $\operatorname{Re}(s) > 0$. Es conveniente mencionar que la notación $\mathcal{L}[f]$ denota la operación de transformación por Laplace, en el mismo sentido en que se definió el operador $\mathcal{F}$.

Debe hacerse notar que, en cierto modo, la transformada de Laplace es análoga a la de Fourier. De hecho, no será ninguna sorpresa obtener propiedades similares, con deducciones casi en paralelo, a las que se obtuvieron para la transformada de Laplace. Debe notarse en este punto que además de la notación de la transformada de Laplace a través de un operador, también adoptamos una notación corta para transformadas de Laplace. En este espacio vamos a usar la convención de que la transformada de Laplace de una función $f(t)$ se denota por la letra mayúscula correspondiente de la función en cuestión, pero con la variable s , esto es, denotamos la transformada de Laplace de $f(t)$ por $F(s)$.

No obstante la analogía anterior, es necesario mencionar que varias otras propiedades de la transformada de Laplace pueden no ser completamente análogas a su contraparte en Fourier. Por ejemplo, comenzando con la transformación inversa se tiene una fórmula, si bien parecida, pero no del todo equivalente a la inversa de la transformada de Fourier. De hecho, la transformada de Laplace inversa viene dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (9.21)$$

Primero, debemos observar que la integración, para obtener la transformación inversa de Laplace, se realiza en el plano complejo a lo largo de una recta paralela al eje imaginario, pero desplazado por una cantidad ϵ . El valor de ϵ se debe tomar como el valor para el cual la trayectoria del contorno de integración está en la región de convergencia de $F(s)$. En la mayoría de los casos, el contorno se puede cerrar por la izquierda, lo que permite utilizar el teorema del residuo. En este caso, el valor de ϵ se toma como aquel para el cual la función $F(s)$ no es singular en el semi-plano $\operatorname{Re}(s) > \epsilon$. En este caso, todos los polos de $F(s)$ quedan a la izquierda de la trayectoria de integración y se puede emplear en ese caso el teorema del residuo:

$$f(t) = \sum (\text{residuos de } F(s)e^{st} \text{ en el semi-plano } \operatorname{Re}(s) < \epsilon), \quad (9.22)$$

lo que provee de una fórmula práctica para obtener la transformada inversa de Laplace en gran parte de las aplicaciones de esta herramienta.

Al igual que la transformación por Fourier, la transformada de Laplace es una operación lineal, es decir, que factoriza constantes y se distribuye sobre la suma:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad (9.23)$$

propiedad que se verifica directamente por la propiedad de linealidad de la integración en la ecuación (9.20).

Otra propiedad que es importante consiste en la fórmula para la transformada de Laplace de las derivadas de una función $f(t)$, que las transforma en una operación algebraica que involucra la transformada de $f(t)$ (pero de una forma ligeramente distinta al caso de Fourier):

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = s \mathcal{L} [f(t)](s) - f(0), \quad (9.24)$$

o bien, utilizando la notación compacta mencionada arriba, i.e., $F(s) = \mathcal{L} [f(t)](s)$, tenemos que:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0). \quad (9.25)$$

Al igual que en el caso Fourier, esta identidad se puede demostrar fácilmente realizando una integración por partes. Además, podemos darnos cuenta de que la propiedad (9.25), al iterarla repetidas veces, nos arroja una fórmula simple para la transformada de Fourier de la n -ésima derivada:

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (9.26)$$

Y al igual que la transformación de Fourier, la de Laplace también posee una fórmula “inversa” en relación con las derivadas que consiste en que, bajo la transformación de Laplace, la multiplicación por t^n se convierte en una operación de derivada:

$$\mathcal{L} [t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s). \quad (9.27)$$

Debe notarse que la transformada de Laplace de la n -ésima derivada incluye los valores “iniciales” de la función $f(t)$. Esta propiedad se vuelve importante al momento de resolver ecuaciones diferenciales, pues al transformar las derivadas de una función desconocida en un problema de valor inicial, se incluyen automáticamente las condiciones iniciales, es decir, la transformada de Laplace se lleva consigo el problema de valor inicial en el proceso de transformación.

La transformada de Laplace también posee dos propiedades en relación con la traslación de las variables independientes s y t :

$$\mathcal{L} [e^{at} f(t)] = F(s - a), \quad (9.28)$$

$$\mathcal{L} [f(t - a)H(t - a)] = e^{-as} F(s). \quad (9.29)$$

Asimismo, también la transformada de Laplace posee una propiedad de escalamiento similar a la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F} [f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (9.30)$$

Finalmente, una propiedad más de la transformada de Laplace, que es análoga a la de Fourier, es que, al transformar la operación de convolución entre dos funciones, esta se convierte en una operación de multiplicación entre las transformadas de Laplace correspondientes. Sin embargo, en este caso la convolución se define de una manera diferente al caso Fourier. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, la convolución $f * g$ se define como:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (9.31)$$

No es difícil probar que la transformada de la convolución resulta en el producto de las transformadas:

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = F(s)G(s). \quad (9.32)$$

De manera análoga se tiene una propiedad inversa que nos indica que la transformada del producto de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se convierte en la convolución de las transformadas, pero con una convolución también distinta de la definida en la ecuación (9.31):

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\epsilon - iT}^{\epsilon + iT} F(\sigma)G(s - \sigma)d\sigma, \quad (9.33)$$

donde el valor $\epsilon \in \mathbb{R}$ se escoge de la misma manera en que se escoge el valor de ϵ en la transformada inversa de Laplace.

9.2. La ecuación de difusión 1D

9.2.1. Solución mediante transformada de Fourier

Consideremos la ecuación de difusión en una dimensión,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (9.34)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y con condición inicial dada por

$$\rho(x, t = 0) = f(x), \quad (9.35)$$

siendo $f(x)$ alguna función conocida que representa la densidad inicial del sistema al tiempo $t = 0$. En este caso las fronteras están al infinito, y para definir las condiciones ahí vamos a hacer uso de un argumento físico. Primero, hay que recordar que la ecuación de difusión gobierna el comportamiento de un colectivo de partículas que se difunden en algún

medio (en este caso infinito y unidimensional). La forma de describir el comportamiento de dicho colectivo es a través de su correspondiente densidad, denotada por $\rho(x, t)$. Si partimos del supuesto de que la densidad debe estar normalizada en el sentido de que la integral sobre el dominio en cuestión debe ser el “número total de partículas” o la “masa” total del sistema, tendremos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx = M, \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad (9.36)$$

siendo M la masa total del sistema. Hay que hacer notar que si la integral de $\rho(x, t)$ en $\mathbb{R}$ nos da un valor M , entonces, la condición inicial debe satisfacer la misma propiedad, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = M. \quad (9.37)$$

Esta propiedad de integrabilidad en todo $\mathbb{R}$ indica que $\rho(x, t)$ debe desaparecer al infinito, tanto a la izquierda como a la derecha, para que la integral exista, esto quiere decir que es necesario que $\rho(x, t)$ satisfaga la condición “de frontera” siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x, t) = 0. \quad (9.38)$$

Así, tenemos que la integrabilidad de $\rho(x, t)$ nos indica que su transformada de Fourier, respecto a la variable x , debe existir. Si denotamos la transformada de Fourier respecto a x de la densidad $\rho(x, t)$ por $\tilde{\rho}(k, t)$, entonces, podemos ver que al transformar cada término de la ecuación en derivadas parciales (9.34) obtenemos:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = D(-ik)^2 \tilde{\rho}(k, t). \quad (9.39)$$

Debe notarse ahora que esta última ecuación es, en realidad, una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de primer orden. Ecuación que se puede resolver fácilmente, ya que:

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt} \ln(\tilde{\rho}) = -Dk^2, \quad (9.40)$$

lo que se puede resolver integrando directamente en ambos lados de la igualdad,

$$\tilde{\rho}(k, t) = C_0(k) e^{-Dk^2 t}, \quad (9.41)$$

siendo $C_0(k)$ una “constante” de integración. Nótese que ponemos entre comillas “constante” ya que C_0 es una función de k , lo que es constante respecto de la variable de tiempo, que es en la que resolvimos nuestra ecuación diferencial ordinaria. Para fijar la

constante de integración es necesario recurrir, por su puesto, a las condiciones iniciales. Es claro que como $\tilde{\rho}(k, t)$ es la transformada de Fourier de la densidad $\rho(x, t)$, para todo tiempo, lo debe ser en particular para la densidad inicial, es decir,

$$\tilde{\rho}(k, t = 0) = \tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (9.42)$$

Por otro lado, tenemos que a $t = 0$ la solución que obtuvimos para $\tilde{\rho}(k, t)$ es sencillamente [véase ec. (9.41)]:

$$\tilde{\rho}(k, t = 0) = C_0(k). \quad (9.43)$$

Entonces, la condición inicial para la densidad en el espacio de Fourier no es más que la transformada de Fourier de la densidad inicial:

$$C_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (9.44)$$

Una vez que somos capaces de obtener $C_0(k)$, nos encontramos en disposición de obtener la solución buscada, $\rho(x, t)$, llevando la transformada de Fourier $\tilde{\rho}$ al espacio real mediante la transformada inversa:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (9.45)$$

o bien, de manera un poco más explícita:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk. \quad (9.46)$$

Resumen de solución por transformada de Fourier
Ecuación de difusión 1D definida en todo $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \rho(x, t = 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Con estas condiciones se tiene como solución:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk,$$

donde C_0 es la transformada de Fourier de la condición inicial (densidad inicial):

$$C_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Ejemplo 9.2.1. Para ilustrar mejor cómo se obtiene la solución mediante la técnica de la transformada, vamos a usar como condición inicial la función delta de Dirac ubicada en algún punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = M\delta(x - x_0). \quad (9.47)$$

Con esta condición inicial tenemos que

$$C_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} M\delta(x - x_0)e^{-ikx}dx = \frac{Me^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (9.48)$$

lo que nos lleva a expresar la densidad de partículas en el espacio real, $\rho(x, t)$, como la integral:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} e^{-Dk^2t} e^{ikx} dk, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Dt k^2 + i(x - x_0)k) dk. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Se debe hacer notar que esta integral tiene como integrando un polinomio cuadrático en la variable de integración k , por lo que esta integral pertenece a la familia de las integrales de Gauss. Para poner a esta integral en la forma estándar de integral gaussiana hay que completar el cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} -Dt k^2 + i(x - x_0)k &= -Dt \left[k^2 - 2 \frac{i(x - x_0)}{2Dt} k \right] \\ &= -Dt \left[k^2 - 2 \frac{i(x - x_0)}{2Dt} k + \left(\frac{i(x - x_0)}{2Dt} \right)^2 - \left(\frac{i(x - x_0)}{2Dt} \right)^2 \right] \\ &= -Dt \left[\left(k - \frac{i(x - x_0)}{2Dt} \right)^2 + \frac{(x - x_0)^2}{4D^2t^2} \right] \\ &= -Dt \left(k - \frac{i(x - x_0)}{2Dt} \right)^2 - \frac{(x - x_0)^2}{4Dt}. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Si reemplazamos esta última expresión en la integral (9.49) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-Dt \left(k - \xi \right)^2 - \frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right) dk \\ &= \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-Dt (k - \xi)^2 \right) dk \end{aligned} \quad (9.51)$$

en donde hemos denotado por ξ la fracción:

$$\xi := \frac{i(x - x_0)}{2Dt},$$

para hacer más ligera la notación. Ahora notemos que la integral que aparece en la ecuación (9.51) ya se puede evaluar directamente, dando el resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-Dt(k-\xi)^2\right) dk = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}}.$$

Con esto tenemos que la densidad de partículas que buscamos está dada por:

$$\rho(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}\right). \quad (9.52)$$

9.2.2. Solución mediante transformada de Laplace

Consideremos de nueva cuenta la ecuación de difusión en una dimensión,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (9.53)$$

con $x \in \mathbb{R}$ y con la condición inicial como en la sección anterior, esto es:

$$\rho(x, t=0) = f(x), \quad (9.54)$$

siendo $f(x)$ alguna función dada.

Vamos a resolver de nueva cuenta esta ecuación en derivadas parciales, pero ahora haremos uso de la transformada de Laplace para ejemplificar su uso en la resolución de esta clase de problemas.

Comencemos denotando por $\hat{\rho}(x, s)$ la transformada de Laplace de la función $\rho(x, t)$ en la variable de tiempo t , es decir,

$$\hat{\rho}(x, s) := \int_0^{\infty} \rho(x, t) e^{-st} dt. \quad (9.55)$$

Tenemos ahora que transformar por Laplace todos los términos que aparecen ahí. Para empezar, hay que notar que la transformada de la derivada segunda respecto a la variable x de $\rho(x, t)$ se convierte en la derivada segunda respecto a la variable x de $\hat{\rho}(x, t)$:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} \rho(x, t) e^{-st} dt. \quad (9.56)$$

lo que claramente nos lleva a la igualdad

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2}. \quad (9.57)$$

Por otro lado, la derivada temporal de $\rho(x, t)$ se transforma de acuerdo con las propiedades enunciadas en la sección 9.1.2. Específicamente tenemos que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] = s\hat{\rho}(x, t) + \rho(x, t=0) = s\hat{\rho}(x, t) + f(x), \quad (9.58)$$

donde hicimos uso de la condición inicial de la ecuación (9.54). Ahora, al sustituir las identidades de las expresiones (9.57) y (9.57), en la ecuación de difusión 9.53 obtenemos:

$$D \frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} = s\hat{\rho}(x, t) + f(x), \quad (9.59)$$

la cual se puede reescribir, de manera conveniente, como:

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \hat{\rho}(x, t) = \frac{1}{D} f(x). \quad (9.60)$$

Debemos notar que la ecuación (9.53) se puede ver como una ecuación diferencial ordinaria que resulta ser de segundo orden y no homogénea. Esta última característica (ecuación no homogénea) nos permite utilizar la técnica de la función de Green. Tal como vimos en el capítulo 8, si podemos construir la función de Green asociada a la ecuación diferencial (9.53), es decir, si podemos hallar la solución $G(x, x')$ de la ecuación:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k_0^2 G(x, x'; s) = \delta(x - x'), \quad (9.61)$$

donde $k_0^2 := s/D$, entonces, podemos obtener la solución $\hat{\rho}(x, s)$ de la ecuación (9.53) de la forma siguiente:

$$\hat{\rho}(x, s) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x'; s) f(x') dx'. \quad (9.62)$$

No es difícil mostrar que la función de Green $G(x, x'; s)$ que buscamos [esto es, la solución de la ecuación (9.61)] se puede escribir como:

$$G(x, x'; s) = -\frac{1}{2k_0} e^{-k_0|x-x'|}, \quad (9.63)$$

o bien, en términos de la variable s explícitamente (recuérdese que $k_0^2 := s/D$), tenemos que:

$$G(x, x'; s) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x'| \right). \quad (9.64)$$

Esta expresión para la función de Green nos permite escribir la solución $\hat{\rho}(x, s)$ de la siguiente forma:

$$\hat{\rho}(x, s) = -\frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x'|\right) f(x') dx'. \quad (9.65)$$

Podemos ver que esta expresión depende de la condición inicial particular del problema en cuestión. De modo que, para resolver el problema, primero hay que resolver la integral (9.65). Una vez que se obtiene una expresión explícita para $\hat{\rho}(x, s)$, procedemos a invertirla por Laplace para obtener la solución deseada, es decir, la función $\rho(x, t)$ que es la solución de la ecuación (9.53),

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \hat{\rho}(x, s) e^{st} ds. \quad (9.66)$$

Resumen de solución por transformada de Laplace
Ecuación de difusión 1D definida en todo $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \rho(x, t = 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Con estas condiciones se tiene como solución transformada de Laplace:

$$\hat{\rho}(x, s) = -\frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x'|\right) f(x') dx'.$$

y la solución buscada es la transformada inversa de Laplace de $\hat{\rho}(x, t)$:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \hat{\rho}(x, s) e^{st} ds.$$

Ejemplo 9.2.2. Para ejemplificar con más detalle este método de solución vamos a escoger una función específica para $f(x)$. De hecho, al igual que en el ejemplo 9.2.1, usaremos la función $f(x) = M\delta(x - x_0)$. Esta elección nos permite escribir la transformada $\hat{\rho}(x, s)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x, s) &= -\frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x'|\right) \delta(x' - x_0) dx' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x_0|\right). \end{aligned} \quad (9.67)$$

Ahora procedemos a obtener la solución buscada aplicando la transformación inversa, esto es:

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\sqrt{D}} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x_0|\right) e^{st} ds. \quad (9.68)$$

Vamos a concentrarnos en resolver la integral de la transformación inversa. Para este propósito, vamos a denotar por a la cantidad $a := |x - x_0|/\sqrt{D}$, y vamos a concentrarnos en evaluar la integral en el plano complejo siguiente:

$$I(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds. \quad (9.69)$$

Debe notarse que esta integral es, salvo constantes, la misma que aparece en la expresión (9.68). Lo primero que debemos hacer es notar que esta integral tiene un corte de ramificación en el semi-eje real negativo del plano complejo s , lo que se debe a la presencia de la función $\sqrt{s}$ en el integrando de I . Esto significa que la técnica usual de cerrar el contorno de integración como un semi-círculo hacia el semi-plano negativo (en dirección contraria a las manecillas del reloj) no funciona en este caso, pues dicho contorno atravesaría el corte de ramificación. Esta situación se ilustra gráficamente en la figura 9.1(a). Para evitar esta situación es necesario deformar el contorno de integración para rodear el corte de ramificación y proceder de manera usual tomando el límite cuando el radio del semi-círculo mayor se hace infinitamente grande, y el radio del círculo menor se hace cero. En la figura 9.1(b), podemos apreciar la forma en la que debemos tomar el contorno de integración para resolver la integral I definida en la ecuación (9.69).

Para evaluar la integral I vamos, primero, a explorar la integral sobre el contorno C propuesto en la figura 9.1(b) definido por las trayectorias C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , y C_6 . A dicha integral la denotaremos por $J_{r,R}$, esto es:

$$J_{r,R} := \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds, \quad (9.70)$$

donde R denota el radio de los semi-círculos que componen parte externa del contorno C (es decir, las trayectorias C_2 y C_6), mientras que r denota el radio del círculo interior (contorno C_4). Para hallar la integral buscada, es claro que eventualmente tomaremos los límites $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

Notemos que la integral $J_{r,R}$ se puede escribir como la suma de las integrales sobre cada trayectoria C_i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 , las cuales denotaremos por J_i , una vez que hemos tomado los límites $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, es decir:

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} J_{r,R} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6. \quad (9.71)$$

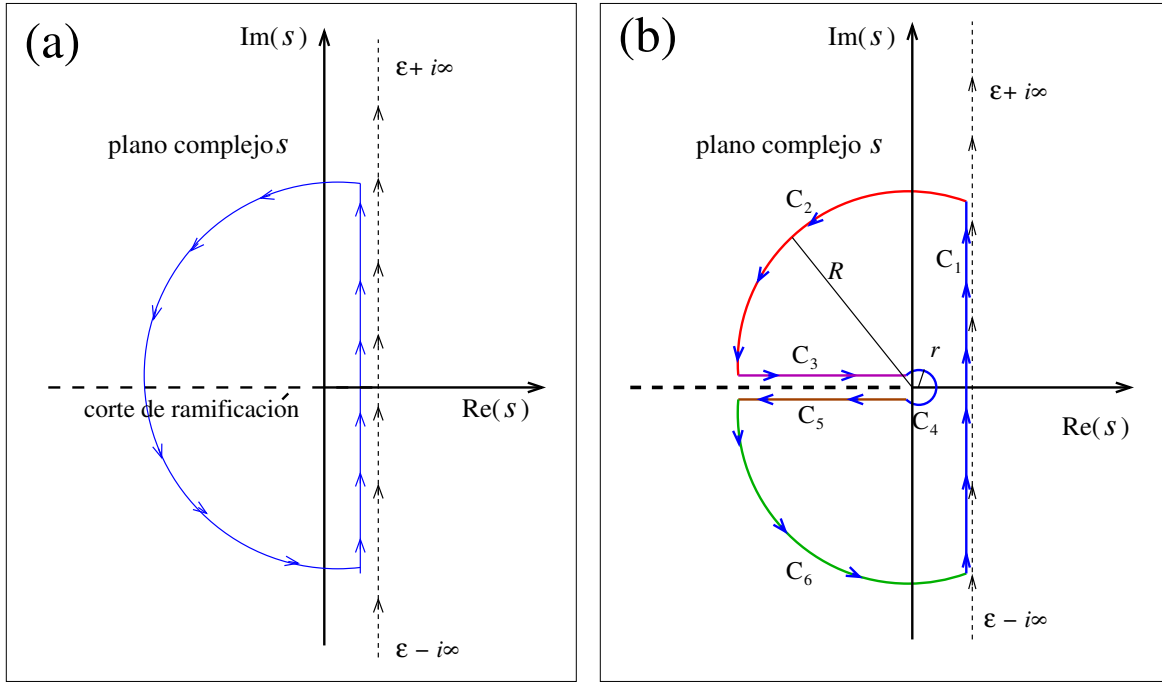


Figura 9.1: Diagrama esquemático de contornos de integración para transformadas inversas de Laplace. (a) Cuando el integrando no posee cortes de ramificación, la línea de integración se cierra por la izquierda en un semi-círculo que eventualmente encierra todos los polos del integrando. (b) Cuando hay cortes de ramificación se debe evitar atravesarlos rodeándolos. En este caso, el corte de ramificación corresponde al de la función $\sqrt{s}$, el semi-eje real negativo. Esto nos permite resolver la integral I definida en la ecuación (9.69).

También es necesario hacer notar que la integral $J_{r,R}$ es idéntica a cero (para cualesquiera $r, R \in \mathbb{R}^+$), lo que se sigue del teorema de los residuos, al no existir polos ni singularidades del integrando al interior del contorno C . Esto quiere decir que la suma de las integrales J_i es cero, esto es:

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 = 0.$$

Notemos algo más: debido a que los semi-arcos C_2 y C_6 son trayectorias que se van al infinito, es claro que las correspondientes integrales serán cero, puesto que el integrando

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{st - a\sqrt{s}}$$

se hace exponencialmente cero cuando $|s| \rightarrow \infty$. De igual manera, la integral sobre el segmento de círculo interior, C_4 , también es cero, ya que el radio es cero y, por ende, la longitud de dicha trayectoria va a cero. Explícitamente podemos escribir:

$$J_2 = J_6 = J_4 = 0,$$

lo que nos indica que

$$J_1 + J_3 + J_5 = 0.$$

Notemos que la integral J_1 es justo la integral I que buscamos, ya que al tomar los límites $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, la integral sobre la trayectoria C_1 se transforma en la trayectoria de integración que define la transformada inversa de Laplace. Eso implica que la integral buscada se puede escribir como:

$$I = -J_3 - J_4. \quad (9.72)$$

Analicemos ahora por separado las integrales J_3 y J_4 . La integral J_3 se puede escribir directamente como sigue:

$$J_3 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\delta}^{0+i\delta} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds, \quad (9.73)$$

siendo $\delta > 0$ un número real arbitrario. Observemos que, en el límite $\delta \rightarrow 0$, la función raíz $\sqrt{s} = \sqrt{-x+i\delta}$ se convierte en $\sqrt{s} = i\sqrt{x}$, siendo $-x$ la parte real de la variable s . Esto quiere decir que podemos escribir para J_3 lo siguiente:

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-xt-ia\sqrt{x}} dx. \quad (9.74)$$

Si ahora hacemos el cambio de variable real $u = \sqrt{x}$ ($du = dx/2\sqrt{x}$), tendremos que la integral J_3 se podrá expresar alternativamente como:

$$J_3 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2t-ia u} du. \quad (9.75)$$

Debemos notar que esta integral pertenece a la familia de las integrales de Gauss. Pero antes de proceder a su evaluación veamos, primero, el resultado de la integral J_4 .

En forma completamente análoga al caso anterior, tenemos que J_4 puede escribirse como:

$$J_4 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{0-i\delta}^{-\infty-i\delta} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds, \quad (9.76)$$

siendo $\delta > 0$ un número real arbitrario (nótese que los límites de integración han cambiado, ya que el sentido de C_5 es del origen al infinito por el semi-eje real negativo). Observemos que, en el límite $\delta \rightarrow 0$, la función raíz $\sqrt{s} = \sqrt{-x-i\delta}$ se convierte en $\sqrt{s} = -i\sqrt{x}$, siendo $-x$ la parte real de la variable s . Esto se puede apreciar mejor en la representación polar:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sqrt{-x-i\delta} = \lim_{\theta \rightarrow -\pi} (\sqrt{x}e^{i\theta}) = \sqrt{x}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{x}$$

Esto quiere decir que podemos escribir para J_4 la siguiente expresión:

$$J_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-xt+ia\sqrt{x}} dx, \quad (9.77)$$

que, al igual que con la integral J_3 , podemos escribirla alternativamente, con el cambio de variable $u = \sqrt{x}$, como:

$$J_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-tu^2+iau} du. \quad (9.78)$$

Por conveniencia, vamos a escribir la integral J_4 cambiando el signo de u , de manera que

$$J_4 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-tu^2-iau} du. \quad (9.79)$$

Ahora, este resultado junto con el obtenido para J_3 dado en la ecuación (9.75), nos permite escribir la integral I de la siguiente manera (recuerde que $I = -J_3 - J_4$):

$$I(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2-iau} du. \quad (9.80)$$

Para evaluar esta integral hay que completar el cuadrado perfecto en el argumento de la exponencial:

$$tu^2 + iau = t \left(u^2 + 2i \frac{a}{2t} u \right) = t \left(u^2 + 2 \frac{ia}{2t} u + \left(\frac{ia}{2t} \right)^2 - \left(\frac{ia}{2t} \right)^2 \right), \quad (9.81)$$

lo que nos da como resultado

$$tu^2 + iau = t \left(u + \frac{ia}{2t} \right)^2 + \frac{a^2}{4t}. \quad (9.82)$$

Al sustituir esto en la integral I de la ecuación (9.80), obtenemos:

$$I(a) = -\frac{e^{-a^2/4t}}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-t(u-\xi)^2} du, \quad (9.83)$$

donde hemos denotado por ξ la cantidad $ia/2t$ por mera conveniencia. Así, el resultado de la integral se obtiene directamente, lo que resulta en:

$$I(a) = -\frac{e^{-a^2/4t}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t\pi}} e^{-a^2/4t}. \quad (9.84)$$

Si recordamos ahora la expresión para $\rho(x, t)$ como transformada inversa de Laplace:

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\sqrt{D}} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{D}} |x - x_0|\right) e^{st} ds, \quad (9.85)$$

así como la definición original de la integral $I(a)$,

$$I(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds, \quad (9.86)$$

podemos notar que:

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{D}} I\left(\frac{|x - x_0|}{\sqrt{D}}\right). \quad (9.87)$$

Como ya hemos evaluado la integral $I(a)$, nos queda solamente hacer unas cuantas sustituciones, lo que resulta en:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x-x_0)^2/4Dt}, \quad (9.88)$$

que es exactamente la misma solución que hallamos mediante la técnica de la transformada de Fourier.

9.2.3. Ecuación de difusión en el semi-eje positivo: solución por transformada de Laplace y el método de las imágenes

Consideremos un ejemplo similar al caso que hemos explorado: el de la ecuación de difusión pero con una pared dura que limita el proceso de difusión al semi-eje real positivo. Como se trata de una pared dura, se ha de imponer la condición en la frontera de que no haya flujo en el punto $x = 0$. Este problema nos servirá para ilustrar el método de las imágenes, que suele utilizarse en física para resolver algunos problemas relacionados con potenciales electrostáticos.

Consideremos de nueva cuenta la ecuación de difusión en una dimensión,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (9.89)$$

pero ahora con la variable espacial x restringida al semi-eje positivo, esto es $x \in [0, \infty)$. Vamos a considerar la condición inicial como en la sección anterior, esto es:

$$\rho(x, t = 0) = f(x), \quad (9.90)$$

siendo $f(x)$ alguna función dada. También debemos agregar en este caso que la solución que busquemos ha de satisfacer la condición de frontera:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (9.91)$$

que nos indica que no puede haber flujo de partículas en el punto $x = 0$. Se debe mencionar también que la función satisface la condición de frontera al infinito $\rho(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, propiedad que se sigue de la integrabilidad de $\rho(x, t)$ por tratarse de una densidad.

Denotamos de nueva cuenta por $\hat{\rho}(x, s)$ la transformada de Laplace de la función $\rho(x, t)$ en la variable de tiempo t , es decir,

$$\hat{\rho}(x, s) := \int_0^\infty \rho(x, t) e^{-st} dt. \quad (9.92)$$

En la sección anterior, ya realizamos el procedimiento de transformar por Laplace toda la ecuación, y obtuvimos como resultado la ecuación diferencial en el espacio de Laplace dada por la expresión (9.60), que reescribimos a continuación:

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \hat{\rho}(x, t) = \frac{1}{D} f(x). \quad (9.93)$$

Es claro que, al igual que el caso tratado en la sección 9.2.2, esta es una ecuación que se puede resolver mediante el método de la función de Green. Sin embargo, en este caso la función de Green es diferente porque ahora debemos satisfacer condiciones de frontera diferentes. De hecho, la función de Green asociada al problema dado por la ecuación (9.93) satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, x'; s) - k_0^2 G(x, x'; s) = \delta(x - x'), \quad (9.94)$$

con la condición de frontera:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} G(x, x'; s) \right|_{x=0} = 0, \quad (9.95)$$

y donde la constante k_0^2 está definida como $k_0^2 := s/D$.

Hay que observar que la ecuación (9.94) está definida para valores de $x > 0$, y al igual que esta condición, la variable x' está restringida a tomar valores positivos $x' > 0$. Esta observación se vuelve importante al aplicar el *método de las imágenes*, ya que haremos uso de valores en el semi-eje negativo para, por decirlo de alguna forma, “complementar” la ecuación (9.94).

Primero, debemos notar que la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, x'; s) - k_0 G(x, x'; s) = \delta(x - x') + \delta(x + x'') \quad (9.96)$$

tiene exactamente la misma solución que la ecuación (9.94) siempre y cuando la constante x'' sea positiva, es decir, $x'' > 0$. Esto es cierto ya que la función $\delta(x + x'')$ es cero para todo $x > 0$, y como la ecuación diferencial (9.94) está definida para $x > 0$, entonces, el término agregado no modifica en lo absoluto la solución al problema. Este hecho lo podemos aprovechar para destacar que la solución de la ecuación (9.94) se puede escribir como una combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1(x, x'; s) - k_0 G_1(x, x'; s) = \delta(x - x'), \quad (9.97)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_2(x, x'; s) - k_0 G_2(x, x'; s) = \delta(x + x''), \quad (9.98)$$

donde la variable x se puede considerar como válida en todo $\mathbb{R}$. Esto es posible ya que la combinación lineal

$$G(x, x'; s) := AG_1(x, x'; s) + BG_2(x, x'; s)$$

satisface la ecuación (9.94) en el semi-eje real positivo. Si la elección de x'' es adecuada, lograremos hacer que dicha combinación satisfaga la condición de frontera 9.95. Es claro que, si no bastase la combinación lineal de las funciones G_1 y G_2 para lograr satisfacer la condición de frontera, siempre se pueden agregar términos de la forma $\delta(x + x''_i)$ con valores $x''_i > 0$ sin alterar la solución a la ecuación (9.94).

Afortunadamente, en este caso no hace falta tomar más funciones de Green, y basta con tomar la elección $x'' = x'$ para lograr nuestro objetivo. Primero, notemos que las soluciones a las ecuaciones (9.97) y (9.98) están dadas por

$$G_1(x, x'; s) = -\frac{1}{2k_0} e^{-k_0|x-x'|} \quad (9.99)$$

$$G_2(x, x'; s) = -\frac{1}{2k_0} e^{-k_0|x+x'|} \quad (9.100)$$

donde hemos fijado $x'' = x'$. Ahora, probemos si la combinación lineal de estas funciones satisface la condición de frontera. Si denotamos por

$$G(x, x'; s) = -\frac{A}{2k_0} e^{-k_0|x-x'|} - \frac{B}{2k_0} e^{-k_0|x+x'|} \quad (9.101)$$

notemos que, cuando x está cerca de cero (y por lo tanto podemos tomar $x < x'$), esta función toma la forma:

$$G(x, x'; s) = -\frac{A}{2k_0} e^{k_0(x-x')} - \frac{B}{2k_0} e^{-k_0(x+x')}. \quad (9.102)$$

Esta última expresión nos sirve para hallar la derivada y evaluarla en $x = 0$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x}G(x, x'; s)\right|_{x=0} &= -\frac{A}{2}e^{k_0(x-x')} + \frac{B}{2}e^{-k_0(x+x')}\bigg|_{x=0} \\ &= -\frac{A}{2}e^{-k_0x'} + \frac{B}{2}e^{-k_0x'}.\end{aligned}\quad (9.103)$$

Es fácil ver que, para satisfacer la condición de frontera (9.95), hay que tomar $A = B$. Entonces, tenemos que la función de Green que buscamos, es decir, la solución de la ecuación (9.94) con la condición de frontera impuesta, está dada por:

$$G(x, x'; s) = -\frac{1}{2k_0}(e^{-k_0|x-x'|} + e^{-k_0|x+x'|}). \quad (9.104)$$

Es claro que ahora podemos escribir la solución a la ecuación (9.93) en términos de la función de Green de la siguiente forma:

$$\hat{\rho}(x, s) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x'; s) f(x') dx'. \quad (9.105)$$

o bien, explícitamente, en términos de la función de Green dada en la ecuación (9.104), tenemos que

$$\hat{\rho}(x, s) = -\frac{1}{2Dk_0} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-k_0|x-x'|} + e^{-k_0|x+x'|}) f(x') dx'. \quad (9.106)$$

Separando la integral en dos partes y recordando que $k_0 = \sqrt{s/D}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, s) &= -\frac{1}{2Dk_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_0|x-x'|} f(x') dx' - \frac{1}{2Dk_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_0|x+x'|} f(x') dx' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{sD}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{s}|x-x'|/D} f(x') dx' - \frac{1}{2\sqrt{sD}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{s}|x+x'|/D} f(x') dx'.\end{aligned}\quad (9.107)$$

Una vez que tenemos la fórmula explícita para $\hat{\rho}(x, s)$, lo único que resta es transformarla inversamente por Laplace y obtener la solución buscada:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \hat{\rho}(x, s) e^{st} ds. \quad (9.108)$$

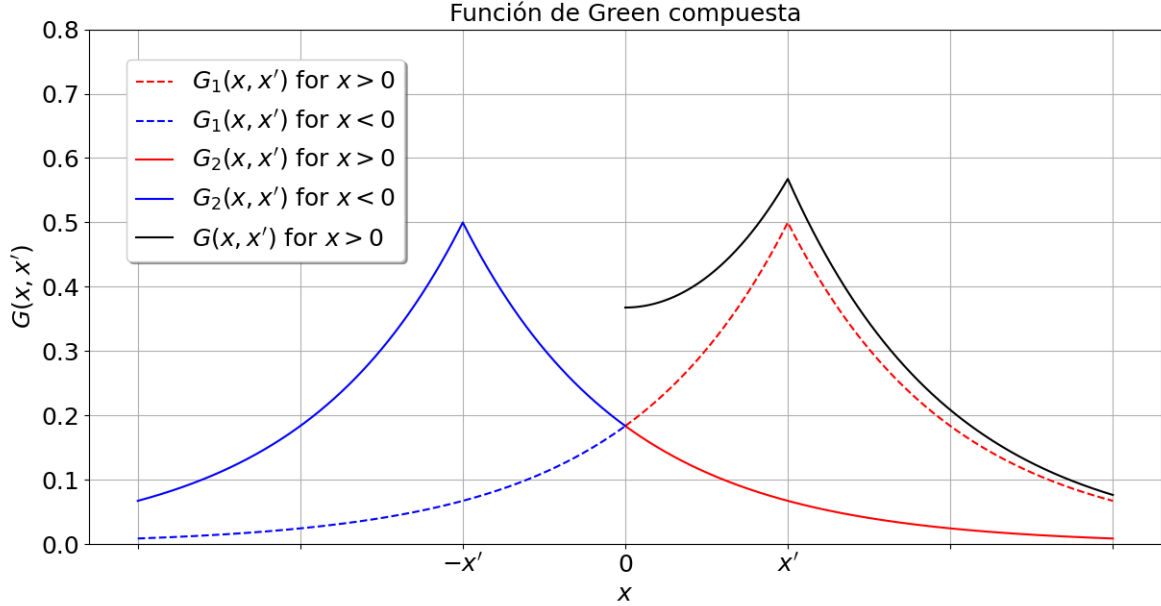


Figura 9.2: Representación esquemática de la función de Green compuesta. La línea punteada (roja y azul) corresponde a la función de Green $G_1(x, x')$ [de la ecuación (9.99)] en todo $\mathbb{R}$ del problema original, es decir, sin considerar la condición de frontera (9.95). La línea sólida (roja y azul) corresponde a la función de Green $G_2(x, x')$ [de la ecuación (9.100)] que es la imagen especular de la función de Green $G_1(x, x')$. Hay que notar que la parte de $G_2(x, x')$ en el semi-eje positivo (línea punteada roja) resuelve la ecuación (9.94) en el dominio de interés $x \in [0, \infty)$, al igual que lo hace $G_1(x, x')$. La suma de las funciones $G_1(x, x')$ y $G_2(x, x')$ (línea sólida negra) sigue siendo solución de la ecuación (9.94) en el intervalo $[0, \infty)$, pero ahora satisface la condición de frontera (9.95) (nótese cómo la derivada se hace cero en el origen).

Resumen de solución por transformada de Laplace
Ecuación de difusión 1D definida en $[0, \infty)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad \rho(x, t = 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

para $x \in [0, \infty)$. Con estas condiciones se tiene como solución transformada de Laplace:

$$\hat{\rho}(x, s) = \frac{1}{D} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x'; s) f(x') dx'.$$

donde $G(x, x'; s)$ es la función de Green del operador de Helmholtz modificado en una dimensión $\nabla^2 - k_0^2$,

$$G(x, x'; s) = -\frac{1}{2k_0} (e^{-k_0|x-x'|} + e^{-k_0|x+x'|}), \quad (9.109)$$

donde $k_0 = \sqrt{s/D}$. La solución buscada es la transformada inversa de Laplace de $\hat{\rho}(x, t)$:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \hat{\rho}(x, s) e^{st} ds.$$

Ejemplo 9.2.3. Consideremos, ahora, una condición inicial especial que nos permite obtener una solución exacta. Supongamos que al tiempo $t = 0$ la densidad inicial es una función delta de Dirac:

$$\rho(x, t = 0) = f(x) = \delta(x - x_0), \quad (9.110)$$

siendo x_0 un real positivo. Como en otras ocasiones, esto significa que las partículas están inicialmente agrupadas en un punto x_0 del espacio donde se difunden. Con esta condición, queda claro que la transformada de Laplace $\hat{\rho}(x, t)$ de la densidad de partículas viene dada por,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x, s) &= -\frac{1}{2\sqrt{sD}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{s}|x-x'|/D} \delta(x' - x_0) dx' - \frac{1}{2\sqrt{sD}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{s}|x+x'|/D} \delta(x' - x_0) dx' \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{sD}} e^{-\sqrt{s}|x-x_0|/D} - \frac{1}{2\sqrt{sD}} e^{-\sqrt{s}|x+x_0|/D}, \end{aligned} \quad (9.111)$$

o bien, factorizando la cantidad $1/\sqrt{sD}$, se obtiene que

$$\hat{\rho}(x, s) = -\frac{1}{2\sqrt{sD}} \left(e^{-\sqrt{s}|x-x_0|/D} + e^{-\sqrt{s}|x+x_0|/D} \right). \quad (9.112)$$

Ahora, si se sustituye este último resultado en la ecuación (9.108) obtenemos:

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(e^{-\sqrt{s}|x-x_0|/D} + e^{-\sqrt{s}|x+x_0|/D} \right) e^{st} ds. \quad (9.113)$$

Cabe destacar que esta última integral se puede escribir en términos de una integral que ya resolvimos en el ejemplo 9.2.2. La integral definida en la ecuación (9.69) es la integral en el plano complejo de la forma:

$$I(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st-a\sqrt{s}} ds, \quad (9.114)$$

la cual, al evaluarla, nos da como resultado:

$$I(a) = \frac{1}{\sqrt{t\pi}} e^{-a^2/4t}, \quad (9.115)$$

tal como lo dejamos expresado en la ecuación (9.84).

Notemos que, en términos de esta integral $I(a)$, podemos escribir la solución expresada en la igualdad (9.113) como sigue:

$$\rho(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{D}} \left(I\left(\frac{|x - x_0|}{D}\right) + I\left(\frac{|x + x_0|}{D}\right) \right), \quad (9.116)$$

lo que nos conduce automáticamente a la siguiente expresión (cf. ejemplo 9.2.2):

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(e^{-(x-x_0)^2/4Dt} + e^{-(x+x_0)^2/4Dt} \right). \quad (9.117)$$

9.3. La ecuación de difusión 2D

Vamos a considerar ahora la ecuación de difusión de partículas en dos dimensiones,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho(\mathbf{r}, t). \quad (9.118)$$

Las condiciones que adoptaremos para la función densidad de partículas, $\rho(\mathbf{r}, t)$, es que debe ser integrable, de manera que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{r}, t) d^2 \mathbf{r} = M, \quad (9.119)$$

siendo M el número de partículas, o cantidad de masa, presente en el sistema. Además de esto, vamos a suponer que al tiempo inicial, $t = 0$, la densidad de partículas está dada por

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad (9.120)$$

siendo $f(\mathbf{r})$ una función dada, la distribución inicial de partículas.

La condición (9.119), es llamada condición de normalización y, entre otras cosas, implica que la función densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ desaparece cuando $\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty$. Como la función $\rho(\mathbf{r}, t) \geq 0$, la condición de normalización implica que la transformada de Fourier de $\rho(\mathbf{r}, t)$ respecto a $\mathbf{r}$ existe. Esto nos permite transformar por Fourier la ecuación de difusión (9.118). Si denotamos por $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ la transformada de Fourier de $\rho(\mathbf{r}, t)$, esto es,

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}, \quad (9.121)$$

entonces, la ecuación de difusión (9.118) toma la forma:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -Dk^2 \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t), \quad (9.122)$$

en donde hicimos uso de la propiedad (9.19) para remplazar el operador laplaciano por $-k^2$. Es claro que en este caso $k^2 := k_x^2 + k_y^2 = \|\mathbf{k}\|^2$.

No esta demás notar que, después de transformar por Fourier la ecuación de difusión, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden. La solución es directa, ya que al integrar nos queda:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) = C(\mathbf{k})e^{-Dk^2 t}, \quad (9.123)$$

siendo $C(\mathbf{k})$ una constante de integración (constante respecto al tiempo) que puede depender de la variable $\mathbf{k}$. Ahora, todo lo que resta es obtener la función $\rho(\mathbf{r}, t)$ mediante la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} C(\mathbf{k}) e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (9.124)$$

De la expresión anterior es posible notar que la constante de integración $C(\mathbf{k})$ es sencillamente la transformada de Fourier de la condición inicial. Esto se puede comprobar directamente en la expresión (9.124) al hacer $t = 0$, ya que nos queda lo siguiente:

$$\rho(\mathbf{r}, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} C(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{k} = f(\mathbf{r}), \quad (9.125)$$

siendo $f(\mathbf{r})$ la condición inicial establecida para nuestro problema. Esto implica claramente que $C(\mathbf{k})$ debe estar dada por:

$$C(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})](\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}. \quad (9.126)$$

Un caso específico en el que se puede escribir la solución explícita es cuando la condición inicial es una delta de Dirac. Si al tiempo inicial todas las partículas que componen al sistema se encuentran en el origen del sistema de coordenadas, entonces, podemos modelar la distribución inicial, $f(\mathbf{r})$, como:

$$f(\mathbf{r}) = M \delta(\mathbf{r}). \quad (9.127)$$

Esto nos lleva a la siguiente expresión para $C(\mathbf{k})$,

$$C(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} M \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2 \mathbf{r} = \frac{M}{2\pi}. \quad (9.128)$$

Con esto, tenemos que la distribución de partículas para todo tiempo posterior viene dada por:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{M}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2 \mathbf{k}. \quad (9.129)$$

La integral que aparece en la expresión anterior se puede resolver exactamente, ya que se trata de un par de integrales de Gauss,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \frac{M}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_x^2 t} e^{-Dk_y^2 t} e^{ixk_x} e^{iyk_y} dk_x dk_y \\ &= \frac{M}{(2\pi)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_x^2 t} e^{ixk_x} dk_x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_y^2 t} e^{iyk_y} dk_y \right). \end{aligned} \quad (9.130)$$

Para resolver estas integrales realizamos el procedimiento usual: completamos el cuadrado perfecto en el argumento de la exponencial para transformar la integral de Gauss,

$$\begin{aligned} -Dk_x^2 t + ixk_x &= -Dt \left(k_x^2 - \frac{ix}{Dt} k_x \right) \\ &= -Dt \left[k_x^2 - 2 \frac{ix}{2Dt} k_x + \left(\frac{ix}{2Dt} \right)^2 - \left(\frac{ix}{2Dt} \right)^2 \right] \\ &= -Dt \left[k_x^2 - 2 \frac{ix}{2Dt} k_x + \left(\frac{ix}{2Dt} \right)^2 \right] + Dt \left(\frac{ix}{2Dt} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.131)$$

de modo que

$$-Dk_x^2 t + ixk_x = -Dt (k_x - \xi)^2 - \frac{x^2}{4Dt}, \quad (9.132)$$

donde definimos la constante ξ como

$$\xi = \frac{ix}{2Dt},$$

para hacer la notación más compacta.

Entonces, podemos ver inmediatamente que la integral que buscamos resolver se escribe como:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_x^2 t} e^{ixk_x} dk_x &= e^{-x^2/4Dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dt(k_x - \xi)^2} dk_x \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \end{aligned} \quad (9.133)$$

Y de igual manera, la integral respecto a k_y nos arroja un resultado totalmente análogo al anterior:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_y^2 t} e^{iyk_y} dk_y = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-y^2/4Dt}. \quad (9.134)$$

Estos resultados nos llevan a escribir la densidad de partículas $\rho(\mathbf{r}, t)$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \frac{M}{(2\pi)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_x^2 t} e^{ixk_x} dk_x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk_y^2 t} e^{iyk_y} dk_y \right) \\ &= \frac{M}{(2\pi)^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-y^2/4Dt} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-x^2/4Dt} \right). \end{aligned} \quad (9.135)$$

Así, después de reducir y factorizar, obtenemos que la densidad de partículas, solución de la ecuación de difusión, toma la forma:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{M}{4\pi Dt} e^{-(x^2+y^2)/4Dt}. \quad (9.136)$$

9.4. Ejercicios

1. Usando la técnica de la transformada de Fourier, demuestra que la función de Green del operador de Helmholtz modificado en una dimensión, $\frac{d^2}{dx^2} - k_0^2$, es decir, la solución de la ecuación:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k_0^2 G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (9.137)$$

está dada por:

$$G(x, x') = -\frac{1}{2k_0^2} e^{-k_0|x-x'|}. \quad (9.138)$$

2. Usando la técnica de la transformada de Fourier, demuestra que la función de Green del operador de Helmholtz en una dimensión, es decir, la solución de la ecuación:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - k_0^2 G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (9.139)$$

está dada por:

$$G(x, x') = -\frac{i}{2k_0^2} e^{ik_0|x-x'|}. \quad (9.140)$$

3. Usa la transformada de Fourier para mostrar que la función de Green del operador de Laplace 3D, la cual es solución de la ecuación diferencial:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (9.141)$$

está dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi||\mathbf{r} - \mathbf{r}'||}. \quad (9.142)$$

4. Obtén las funciones de Green de los operadores de Helmholtz y Helmholtz modificado a partir de la técnica de la transformada de Fourier. Es decir, resuelve las ecuaciones

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (9.143)$$

y

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (9.144)$$

5. Usa la técnica de la transformada de Laplace para resolver la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (9.145)$$

con la variable espacial x restringida al semi-eje positivo, esto es $x \in [0, \infty)$ y con la condición de frontera

$$\rho(x = 0, t) = 0, \quad (9.146)$$

para toda $t > 0$. Usa la condición inicial como en la sección anterior, esto es:

$$\rho(x, t = 0) = f(x). \quad (9.147)$$

6. Usa la técnica de la transformada de Laplace para resolver la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (9.148)$$

con la variable espacial x restringida al intervalo $[0, L]$, y con la condición de frontera de paredes reflejantes, es decir,

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (9.149)$$

para toda $t > 0$. Usa la condición inicial como en la sección anterior, esto es:

$$\rho(x, t = 0) = f(x). \quad (9.150)$$

Apéndice A

Algunas identidades de utilidad

A.1. Método de Laplace

El método de Laplace, llamado así en honor a Pierre-Simon Laplace, es una técnica que se emplea para hacer aproximaciones de integrales que poseen la forma:

$$\int_a^b e^{M f(x)} dx. \quad (\text{A.1})$$

Para aproximar el valor de la integral en la ecuación (A.1), partimos de las siguientes suposiciones: que $f(x)$ es una función doblemente diferenciable, M es un número grande, y los puntos finales a y b podrían ser infinitos. Esta técnica se publicó en el trabajo de Laplace titulado *Mémoire sur la probabilité de causes par les événements* [37].

Es importante mencionar que el método para aproximar integrales de Laplace tiene aplicaciones más allá de la física (en donde se usa principalmente en mecánica estadística cuando se realiza la operación de límite termodinámico [55]) o de la física-matemática. Por ejemplo, se suele utilizar ampliamente en el contexto de la estadística bayesiana, en la que la aproximación de Laplace puede referirse a la aproximación de la constante de normalización posterior con el método de Laplace o a la aproximación de la distribución posterior con una gaussiana centrada en la estimación máxima *a posteriori* [4]. Las aproximaciones de Laplace se utilizan en el método de aproximaciones de Laplace anidadas integradas para aproximaciones rápidas de inferencia bayesiana.

Para enunciar y justificar el método, se deben hacer varias suposiciones. Primero, suponemos que x_0 es un máximo de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y que x_0 no es un punto final, es decir, $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq b$. Suponemos también que los valores $f(x)$ no pueden estar muy cerca

de $f(x_0)$ a menos que x esté cerca de x_0 . Dicho de otra forma, x_0 es un máximo global de f en (a, b) , y es único. Además, necesitamos que $f(x)$ se pueda desarrollar alrededor de x_0 mediante el teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R \quad (\text{A.2})$$

donde $R = O((x - x_0)^3)$ (en la notación O mayúscula [\[1\]](#)).

Como $f(x)$ tiene su máximo global en x_0 , y este no es un punto final del intervalo de integración, entonces, es un punto *estacionario*, es decir, $f'(x_0) = 0$. Por lo tanto, el desarrollo en serie de Taylor a segundo orden que aproxima a $f(x)$ es:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2. \quad (\text{A.3})$$

Ya que x_0 es un máximo de f , se puede afirmar que $f''(x_0) \leq 0$, obteniéndose así la relación

$$f(x) \approx f(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)|(x - x_0)^2, \quad (\text{A.4})$$

para x cercano a x_0 . La integral puede, entonces, aproximarse como sigue:

$$\int_a^b e^{Mf(x)} dx \approx e^{Mf(x_0)} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}M|f''(x_0)|(x-x_0)^2} dx. \quad (\text{A.5})$$

Puesto que $f''(x_0) \leq 0$, la integral en la expresión [\(A.5\)](#) se convierte en una integral gaussiana si reemplazamos los límites de integración por $-\infty$ y $+\infty$. Así, cuando M es grande, esta extensión del intervalo de integración genera solamente un error pequeño porque la exponencial decae muy rápido al alejarse de x_0 .

Calculando esta integral gaussiana obtenemos:

$$\int_a^b e^{Mf(x)} dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}} e^{Mf(x_0)}, \quad \text{con } M \rightarrow \infty. \quad (\text{A.6})$$

¹La notación O mayúscula se refiere al comportamiento asintótico de una función. Se escribe

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{como } x \rightarrow \infty,$$

y se lee “ $f(x)$ es del orden de $g(x)$ ” si el valor absoluto de $f(x)$ es, como máximo, un múltiplo constante positivo del valor absoluto de $g(x)$ para todos los valores suficientemente grandes de x . Es decir, $f(x) = O(g(x))$ si existe un número real positivo M y un número real x_0 tal que

$$|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \text{para todo } x \geq x_0.$$

A.2. Integrales

A continuación, se presenta una serie de identidades de integrales útiles para realizar cálculos desarrollados a lo largo de este libro.

1. Integrales de Gauss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (\text{A.7})$$

Algunos casos más generales que se desprenden de esta identidad son los siguientes:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{a^{2n+1}(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.8})$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2/a^2} dx = \frac{a^{2n+2}n!}{2}. \quad (\text{A.9})$$

2. Algunas integrales trigonométricas indefinidas:

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx. \quad (\text{A.10})$$

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1}(x) \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx. \quad (\text{A.11})$$

3. Algunas integrales trigonométricas definidas:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\phi) d\phi = 2\pi, \quad (\text{A.12})$$

y en general tenemos que:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(\phi) d\phi = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\phi) d\phi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.13})$$

A.3. Series infinitas

Para el desarrollo de los cálculos que involucra la presentación de diversas funciones espaciales que se presentan a lo largo de este libro, es indispensable tener presentes algunas de las series infinitas que ocurren comúnmente.

1. Desarrollo binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m b^{n-k}. \quad (\text{A.14})$$

2. Serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (\text{A.15})$$

3. Desarrollo de las funciones exponencial y logaritmo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \quad (\text{A.16})$$

4. Desarrollo de las funciones seno y coseno:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (\text{A.17})$$

5. Desarrollo de las funciones seno y coseno hiperbólicos:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (\text{A.18})$$

6. Desarrollo de la función raíz inversa:

$$\frac{1}{(1-x)^{1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} x^n. \quad (\text{A.19})$$

También es importante mencionar un par de identidades generales sobre series dobles. Primero, tenemos una identidad de una serie doble que es clave para obtener la función generatriz de las funciones de Bessel. Esta identidad establece que, si tenemos una serie $\{a_{k,m} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$, entonces:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=|\min\{0,m\}|}^{\infty} a_{k,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r-k}. \quad (\text{A.20})$$

En otras palabras, se debe hacer la transformación entre índices como $r = m + k$ y $n = k$, o bien, $m = r - k$ y $k = n$.

Otra identidad de importancia es similar a la anterior y establece que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{k,n-2k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m a_{j,m-j}. \quad (\text{A.21})$$

La transformación entre índices de suma que nos lleva a esta identidad está dada por $k = j$ y $n - 2k = n - j$.

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., y Stegun, I. A. (Eds.). (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)*. US Government printing office.
- [2] Ağargün, A. G., y Özkan, E. M. (2001). A historical survey of the fundamental theorem of arithmetic. *Historia Mathematica*, 28(3), 207-214.
- [3] Albarrán Coria, L. F. (2024). *Un modelo de volatilidad estocástica para precios de activos subyacentes*. [Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de Morelos]. RIAA <http://riaa.uaem.mx/handle/20.500.12055/4597>. Consultado el 01 de febrero de 2025.
- [4] Amaral Turkman, M. A., Paulino, C. D. y Müller, P. (2019). Methods Based on Analytic Approximations. *Computational Bayesian Statistics: An Introduction* (Vol. 11, pp. 150–171). Cambridge: Cambridge University Press.
- [5] Arfken G. B., Weber H. J., y Harris, F. E., (1985) *Mathematical Methods for Physicists, (Vol. 6)*. New York: Academic Press.
- [6] Aycock, A. (2019). *Euler and the Gamma Function*. arXiv preprint arXiv:1908.01571. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.03400>. Consultado el 01 de febrero de 2025.
- [7] Bonnar, J. (2017). *The gamma function*. Treasure Trove of Mathematics. (Independently published). <https://www.yumpu.com/en/document/view/56047637/the-gamma-function>. Consultado el 01 de febrero de 2025.
- [8] Britannica, T. Editors of Encyclopaedia. Karl Weierstrass. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/biography/Karl-Weierstrass>. Consultado el 01 de febrero de 2025.
- [9] Bartle, R.G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York: John-Wiley & Sons.

- [10] Cannell, D. M. (1999). George Green: an enigmatic mathematician. *The American Mathematical Monthly*, 106(2), 136-151.
- [11] Confluir: consulta en el Diccionario de la Real Academia Española <https://dle.rae.es/confluir>, cf. también <https://www.rae.es/dpd/confluir>. Consultado el 16 de enero de 2024.
- [12] Courant, R., y D. Hilbert (1953), *Methods of Mathematical Physics, Vol. I* (English edition). New York: Interscience. (Traducción al inglés del libro original publicado en alemán en 1924).
- [13] Courant, R., y D. Hilbert (1989), *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*. New York: John Wiley & Sons.
- [14] Daalhuis, A. B. O. (2010). Confluent hypergeometric functions. En *NIST handbook of mathematical functions* (pp. 321, 349). Cambridge: Cambridge University Press.
- [15] D'Alembert J.-B. R. (1747) Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration. (pp. 214-219), *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, vol. 3*.
- [16] Davis, P. J. (1959). Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton Abramowitz. *The American Mathematical Monthly*, 66(10), 849-869.
- [17] De La Vallée-Poussin, C. (1896). Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, suivi d'un Appendice sur des réflexions applicables à une formule donnée par Riemann. *Ann. Soc. Scient. Bruxelles, deuxième partie*, 20 (1896).
- [18] Dutka, J. (1984). The early history of the hypergeometric function. *Archive for History of Exact Sciences*, 31, 15-34.
- [19] Euler, L. P. (1813). Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus. *Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg*, 88-119.
- [20] Euler, L. P. (1999). On transcendental progressions that is, those whose general terms cannot be given algebraically. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 1738(5), 36-57.
- [21] Fourier J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Firmin Didot Père et Fils.

- [22] Fourier method. Encyclopedia of Mathematics. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fourier_method&oldid=55821. Consultado el 01 de mayo de 2025.
- [23] Fuss, P. H. (1843). *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géometres du XVIIIème siècle (Vol. 2)*. Paris: Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
- [24] Gauss, C. F. (1801), *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig: Gerh. Fleischer.
- [25] Gauss, C. F. (1813). *Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1-\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot \gamma(\gamma+1)}xx + \text{etc.}$* . *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, 2, 1-46.
- [26] Glaisher, J. W. L. (1871). XXXII. On a class of definite integrals. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42(280), 294-302.
- [27] Graham, R., Knuth, D. E. y Patashnik, O. (1989). *Concrete Mathematics* (2nd ed.). Addison-Wesley.
- [28] Hadamard, J. (1896). Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 24, 199-220.
- [29] Hassani, S. (1999) *Mathematical Physics, a Modern Introduction to its foundations*, New York: Springer-Verlag.
- [30] Hassani, S. (2009) *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields*, (2nd ed). New York: Springer-Verlag.
- [31] Herman, R. L. (2015). *Introduction to partial differential equations*. North Carolina: RL Herman.
- [32] Hurst, S. R., y Platen, E. (1997). The marginal distributions of returns and volatility. (pp. 301-314). *Lecture Notes-Monograph Series*.
- [33] Jarnicki, M., y Pflug, P. (2011). *Separately analytic functions (Vol. 16)*. Zürich: European Mathematical Society.
- [34] Kropáč, O. (1982). Some properties and applications of probability distributions based on MacDonald function. *Aplikace Matematiky*, 27(4), 285-302.
- [35] Kummer, E. E. (1837). De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1837(17), 228-242.

- [36] Ladyzhenskaya, O. A. (2013). *The boundary value problems of mathematical physics (Vol. 49)*. New York: Springer Science & Business Media.
- [37] Laplace, P. S. (1774). *Mémoire sur la probabilité de causes par les événements*. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77596b/f32#>. Consultado el 19 de febrero de 2025.
- [38] Lions, J. L. y Magenes, E. (1968). *Problèmes aux limites non homogènes. (Vol. I)*. Paris: Dunod.
- [39] Lions, J. L. y Magenes, E. (2012). *Non-homogeneous boundary value problems and applications: Vol. 1*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- [40] Madan, D. B., Carr, P. P. y Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *Review of Finance*, 2(1), 79-105.
- [41] Marshall, D. E. (2019). *Complex analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [42] Mathews, W. N., Esrick, M. A., Teoh, Z. Y. y Freericks, J. K. (2022). A physicist's guide to the solution of Kummer's equation and confluent hypergeometric functions. *Condensed Matter Physics*, 25(3), 33203.
- [43] Newman, F. W. (1848). On $\Gamma(a)$, especially when a is negative. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 3, 57-60.
- [44] Neumann, C. (1867). *Theorie der Bessel'schen Functionen: ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen*. Leipzig: BG Teubner.
- [45] Nørlund, N. E. (1923). Mémoire sur le calcul aux différences finies. *Acta Mathematica*, 44(1), 71-212.
- [46] Oldham, K., Myland, J., Spanier, J., Oldham, K. B., Myland, J. C. y Spanier, J. (2009). The Tricomi Function $U(a, c, x)$ (pp. 497-506). *An Atlas of Functions: with Equator, the Atlas Function Calculator*.
- [47] Ostrogradsky, M. (1848). Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acc. St. Petersburg*, 6(1859) 4, 385-517.
- [48] Özişik, M. N. (1989). *Boundary value problems of heat conduction*. New York: Dover Publications Inc.
- [49] Pérez-Marco, R. (2022). On the definition of the Euler Gamma function. *L'Enseignement Mathématique*, 68(1), 135-160.

- [50] Radice, M. (2022). Diffusion processes with Gamma-distributed resetting and non-instantaneous returns. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55(22), 224002.
- [51] Remmert, R. (1991). *Theory of complex functions (Vol. 122)*. New York: Springer Science & Business Media.
- [52] Rivera, I., Salgado-García, R. y Vázquez, F. (2023). Low-frequency heat waves transport in graded Si-Ge alloys. *AIP Advances*, 13(10).
- [53] Ross, B. (1978). The Psi Function. *Mathematics Magazine*, 51(3), 176-179.
- [54] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*. Singapore: McGraw-Hill.
- [55] Salinas, S. R. (2001). *Introduction to Statistical Physics*. New York: Springer-Verlag.
- [56] Sayel A. Ali (2008) The mth Ratio Test: New Convergence Tests for Series. *The American Mathematical Monthly*, 115(6), 514-524, DOI: <https://doi.org/10.1080/00029890.2008.11920558>
- [57] Schlömilch, O. (1843). Einiges über die Eulerischen Integrale der zweiten. Art. *Arch. Math. Phys*, 4(4), 167-174.
- [58] Seneta, E. (2004). Fitting the variance-gamma model to financial data. *Journal of Applied probability*, 41(A), 177-187.
- [59] Stanislavsky, A. A. y Weron, A. (2023). Confined modes of single-particle trajectories induced by stochastic resetting. *Physical Review E*, 108(4), 044130.
- [60] Teichroew, D. (1957). The mixture of normal distributions with different variances. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(2), 510-512.
- [61] Terada, T. (1972). Analyticités relatives à chaque variable. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 12(2), 263-296.
- [62] Titchmarsh, E. C. y Heath-Brown, D. R. (1986). *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford: Oxford University Press.
- [63] Tricomi, F. G. (1947). Sulle funzioni ipergeometriche confluenti. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 26, 141-175.
- [64] Tricomi, F. G. (1960) Fonctions hypergéométriques confluentes. *Mémorial des sciences mathématiques*, 140(1960) http://numdam.org/item/MSM_1960__140__1_0/. Consultado el 17 de enero de 2024.

- [65] Von Koch, H. (1901). Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica*, 24(1), 159.
- [66] Wallis J. (1656). *Arithmetica Infinitorum*, Opera Mathematica, Vol. I, Oxford.
- [67] Watson, G. N. (1922). *A treatise on the theory of Bessel functions (Vol. 3)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [68] Weber, H. (1873). Ueber eine Darstellung willkürlicher Functionen durch Bessel'schen Functionen. *Mathematische Annalen*, 6(2): 146–161.
- [69] Weierstrass, K. (1856). Über die Theorie der analytischen Facultäten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol 51, pp. 1-60.
- [70] Weierstrass, K. (1900). *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, (pp. 1-52). Berlin: Springer-Verlag.
- [71] Whittaker, E. T. (1903). An expression of certain known functions as generalized hypergeometric functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 125–134.

Índice alfabético

Armónicos esféricos, [218](#)

Ceros de

combinación lineal de funciones de Bessel, [174](#), [183](#)

función de Bessel de primer tipo, [170](#)

función zeta de Riemann, [26](#)

Clasificación

de ecuaciones en derivadas parciales, [50](#)

Comportamiento asintótico de

funciones de Bessel, [157](#)

funciones de Bessel modificadas, [156](#)

funciones de Hankel, [156](#)

función contador de números primos, [26](#)

función de Tricomi, [287](#)

función digamma, [19](#)

función gamma, [18](#)

Condición

de frontera de Cauchy, [54](#)

de frontera de Dirichlet, [53](#)

de frontera de Neumann, [54](#)

de frontera mixta, [54](#)

Constante

Euler-Mascheroni, [9](#)

Distribución

beta, [41](#)

exponencial, [38](#)

gamma, [38](#)

K de Bessel, [190](#)

momentos de, [38](#)

normal, [45](#)

doble factorial, [13](#)

Ecuación

asociada de Laguerre, [262](#), [264](#)

asociada de Legendre, [213](#)

autoconjugada, [59](#)

de Bessel, [118](#)

de Bessel de orden semi-entero, [223](#)

de Bessel modificada, [148](#)

de conducción de calor 1D, [82](#)

de conducción de calor con difusividad variable, [179](#)

de difusión, [49](#), [53](#), [360](#)

de difusión 1D, [98](#)

de difusión 1D con arrastre, [104](#)

de Fredholm de primer tipo, [298](#)

de Fredholm de segundo tipo, [298](#)

de Kummer, [278](#)

de Laguerre, [248](#)

de Laplace, [49](#), [52](#)

de Legendre, [195](#), [199](#)

de onda, [49](#), [53](#)

de onda 1D, [74](#)

de onda 2D, [89](#), [116](#)

de onda 2D en coordenadas polares, [116](#)

de onda 2D en un dominio circular, [158](#)

de onda 3D en coordenadas esféricas, [191](#)

de onda en coordenadas polares, [160](#)

de onda en dominio anular, [170](#), [172](#)

de Poisson, [49](#), [52](#)

de Volterra de primer tipo, [298](#)

de Volterra de segundo tipo, 298
 hipergeométrica confluyente, 278
 hipergeométrica, 271
 integral no homogénea, 318

Ecuaciones

en derivadas parciales, 47
 integrales, 297

Fórmula

de Stirling, 17
 de transformación de Kummer, 292
 duplicación de Legendre, 29
 reflexión, 14

Fórmula de Rodrigues

de los polinomios asociados de Laguerre, 266
 de los polinomios de Hermite, 245
 de los polinomios de Laguerre, 254
 de los polinomios de Legendre, 204

Función

beta, 28
 beta incompleta, 276
 de Bessel de primer tipo, 123, 124, 282
 de Bessel de segundo tipo, 140
 de Bessel modificada de primer tipo, 282
 de Bessel modificada de segundo tipo, 294
 de Dawson, 36
 de Kummer, 277, 279, 282
 de Neumann, 140
 de Tricomi, 278, 286
 de Weber, 140
 de Whittaker, 278
 digamma, 16
 error, 34, 282
 error complemento, 35, 282
 error imaginaria, 35
 exponencial integral, 45, 294
 gamma, 3
 gamma incompleta, 31, 283

hipergeométrica, 271
 hipergeométrica confluyente, 277, 282
 hipergeométrica confluyente de segundo tipo, 286
 logaritmo integral, 27
 poligamma, 20
 zeta de Riemann, 21, 22

Funciones

asociadas de Legendre, 213
 de Bessel esféricas, 222, 224
 de Bessel modificadas, 149
 de Chebyshev, 276
 de Green, 325
 de Green en 1D, 326
 de Green en 2D y 3D, 336
 de Green en dimensiones superiores, 332
 de Hankel, 145
 hipergeométricas, 270

Función generatriz de

funciones asociadas de Legendre, 215
 funciones de Bessel, 127
 polinomios asociados de Laguerre, 266
 polinomios de Hermite, 238
 polinomios de Laguerre, 254
 polinomios de Legendre, 200, 201

Fórmulas de Rayleigh para las funciones de Bessel esféricas, 228

Hipótesis de Riemann, 25

Integrales elípticas, 277

Método

de la serie de Neumann, 300
 de las imágenes, 361
 de separación de variables, 73, 116, 191
 del núcleo separable, 306

Números armónicos, 19

Números de Bernoulli, 23

Operador

- autoconjugado, [59](#)
- de momento angular, [221](#)
- Ortogonalidad, [65](#)
- Ortogonalidad de
 - las funciones asociadas del Legendre, [218](#)
 - las funciones de Bessel de primer tipo, [135](#), [138](#)
 - las funciones de Bessel esféricas, [229](#)
 - los armónicos esféricos, [220](#)
 - los polinomios asociados de Laguerre, [267](#), [270](#)
 - los polinomios de Hermite, [243](#)
 - los polinomios de Laguerre, [261](#)
 - los polinomios de Legendre, [210](#)
- Paréntesis de Pochhammer, [273](#)
- Polinomios
 - asociados de Laguerre, [262](#), [264](#), [283](#)
 - de Chebyshev, [290](#)
 - de Gegenbauer, [277](#)
 - de Hermite, [237](#), [246](#), [283](#)
 - de Laguerre, [248](#), [283](#)
 - de Legendre, [205](#), [276](#)
 - ultraesféricos, [277](#)
- Relación de recurrencia
 - de la función gamma, [5](#)
 - de las funciones asociadas de Legendre, [217](#)
 - de las funciones de Bessel, [131](#)
 - de las funciones de Bessel esféricas, [225](#), [227](#)
 - de las funciones de Bessel modificadas, [152](#)
 - de los polinomios de Laguerre, [258](#)
 - de polinomios de Hermite, [240](#)
 - de polinomios de Legendre, [203](#)
- Representaciones de
 - funciones de Bessel de primer tipo, [135](#)
 - funciones de Bessel modificadas, [154](#)
 - función beta, [29](#)
 - función gamma, [12](#)
 - función zeta de Riemann, [27](#)
 - polinomios de Hermite, [245](#)
 - polinomios de Laguerre, [261](#)
 - polinomios de Legendre, [207](#)
- Representación integral de
 - la función de Kummer, [282](#)
 - la función de Tricomi, [286](#)
 - la función hipergeométrica confluyente, [282](#)
- Solución de
 - ecuación de conducción de calor 1D, [88](#)
 - ecuación de difusión 1D, [102](#)
 - ecuación de difusión 1D con arrastre, [108](#)
 - ecuación de difusión 1D por transformada de Fourier, [351](#)
 - ecuación de difusión 1D por transformada de Laplace, [355](#), [361](#)
 - ecuación de difusión 2D por transformada de Fourier, [366](#)
 - ecuación de onda 1D, [81](#)
 - ecuación de onda 2D, [95](#)
 - ecuación de onda 2D en dominio anular, [178](#)
 - ecuación de onda 2D en dominio circular, [168](#)
- Teorema de los números primos, [27](#)
- Teoría
 - de Hilbert-Schmidt, [310](#)
 - de Sturm-Liouville, [55](#), [61](#)
- Transformada de
 - Fourier, [342](#)
 - Fourier en múltiples dimensiones, [345](#)
 - Laplace, [346](#)

El libro *Métodos matemáticos: Funciones especiales y ecuaciones en derivadas parciales* tiene como propósito fundamental introducir al lector en el desarrollo y la implementación de distintos métodos de resolución aplicables a ecuaciones en derivadas parciales, que surgen de manera recurrente en el análisis de fenómenos físicos.

El texto aborda técnicas analíticas clásicas, como la separación de variables y las transformadas integrales, haciendo especial énfasis en la construcción y análisis de funciones especiales, las cuales emergen naturalmente en este contexto. En particular, se desarrolla de manera formal el marco teórico de los problemas de Sturm-Liouville, con el objetivo de proporcionar al lector una comprensión estructural profunda de las soluciones, a partir del estudio de diversas funciones especiales y sus múltiples representaciones. Particularmente, se hace énfasis en el desarrollo de las funciones de la gran familia de funciones de Bessel y polinomios ortogonales, tales como los polinomios de Legendre, Laguerre y Hermite.

Con un enfoque orientado a la formación académica, esta obra está diseñada para ser utilizada como texto base en cursos universitarios —tanto de pregrado como de posgrado— de métodos de la física matemática, dirigidos a estudiantes de física o disciplinas afines.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS